

प्रथम संस्करण

१९५६

मूल्य—तीन रुपये

प्रकाशकीय

भारत की राजभाषा के रूप में हिन्दी की प्रतिष्ठा के पश्चात् यद्यपि इस देश के प्रत्येक जन पर उसकी समृद्धि का दायित्व है, किन्तु इसमें हिन्दी भाषा-भाषी क्षेत्रों के विशेष उत्तरदायित्व में किसी प्रकार की कमी नहीं आती। हमें संविधान में निर्धारित अवधि के भीतर हिन्दी को न केवल सभी राज-कार्या में व्यवहृत करना है, उसे उच्चतम शिक्षा के माध्यम के लिए भी परिपुष्ट बनाना है। इसके लिए अपेक्षा है कि हिन्दी में वाङ्मय के सभी अवयवों पर प्रमाणित ग्रंथ हों और यदि कोई व्यक्ति केवल हिन्दी के माध्यम में ज्ञानार्जन करना चाहे तो उसका मार्ग अवरुद्ध न रह जाय।

इसी भावना में प्रेरित होकर उत्तर प्रदेश शासन ने अपने शिक्षा विभाग के अन्तर्गत साहित्य को पोषाह्न देने और हिन्दी के ग्रंथों के प्रणयन की एक योजना परिचालित की है। शिक्षा-विभाग की अवधानता में एक हिन्दी परामर्श समिति की स्थापना की गयी है। यह समिति विगत वर्षों में हिन्दी के ग्रंथों को पुरस्कृत करके साहित्यकारों का उत्साह बढ़ाती रही है और अब उसने पुस्तक-प्रणयन का कार्य आरम्भ किया है।

समिति ने वाङ्मय के सभी अंगों के सम्बन्ध में पुस्तकों का लेखन और प्रकाशन कार्य अपने हाथ में लिया है। इसके लिए एक पंचवर्षीय योजना बनायी गयी है जिसके अनुसार ५ वर्षों में ३०० पुस्तकों का प्रकाशन होगा। इस योजना के अन्तर्गत प्रायः वे सब विषय ले लिये गये हैं जिस पर समाज के किसी भी उन्नतिशील साहित्य में ग्रन्थ प्राप्त है। इस बात का प्रयत्न किया जा रहा है कि इनमें से प्राथमिकता वाली विषय अथवा उन विषयों में दी जाय जिनकी हिन्दी में नितान्त कमी है।

प्रदेशीय सरकार द्वारा प्रकाशन का कार्य आरम्भ करने का यह आशय नहीं है कि व्यवसाय के रूप में यह कार्य हाथ में लिया गया है। हम केवल ऐसे ही

ग्रन्थ प्रकाशित करना चाहते हैं जिनका प्रकाशन कतिपय कारणों से अन्य स्थानों से नहीं हो पाता। हमारा विश्वास है कि इस प्रयास को सभी क्षेत्रों में सहायता प्राप्त होगी और भारती के भंडार को परिपूर्ण करने में उत्तर प्रदेश का शासन भी किंचित् योगदान देने में समर्थ होगा।

भगवती शरण सिंह

मन्त्रि

हिन्दी परामर्श समिति

इद नम ऋषिभ्यः पूर्वजेभ्यः पूर्वोभ्यः पथिकृद्भ्यः
(ऋग्वेद, १० १४ २५)

ऋषियो को, पूर्वजो को, पूर्ववर्ती पथप्रदर्शको को नमस्कार है

लेखकों का प्राक्कथन

गणित के इतिहासकार अभी इस बात में अनभिज्ञ हैं कि प्राचीन काल के हिन्दू गणितज्ञों ने गणित के क्षेत्र में कहाँ तक उन्नति कर ली थी तथा हम उनके कितने ऋणी हैं। यद्यपि अब सामान्यतः स्वीकार किया जाता है कि अक-सकेत-मन्त्रन्धी म्यान-मान मिद्धान्त का आविष्कार हिन्दुओं ने किया था और उन्होंने ही पहले पहल इसका प्रयोग किया था, तथापि इस बात का पूर्णतया अनुभव नहीं किया जाता कि अपने गणित के लिए हम उनके कितने ऋणी हैं। इसका कारण हिन्दू गणित के इतिहास का अभाव है। प्रस्तुत पुस्तक की रचना का उद्देश्य प्राचीनतम ज्ञात काल से लेकर सत्रहवीं शताब्दी पर्यन्त भारतीय गणित-शास्त्र की क्रमिक उन्नति का विस्तृत विवरण उपस्थित करके इस अभाव की पूर्ति करना है।

विषय का विवेचन प्रकरणों के अनुसार किया गया है। प्रत्येक प्रकरण के अन्तर्गत संस्कृत में लिखे हुए हिन्दू गणित के ग्रंथों में उपलब्ध प्रासंगिक उद्धरणों के अनुवादों का कालक्रमानुसार संग्रह किया गया है। आवश्यकता पड़ने पर व्याख्यात्मक और जालोचनात्मक टिप्पणियाँ देकर तथा संस्कृत ग्रंथों में दिये गये उदाहरणों को प्रस्तुत करके उनका स्पष्टीकरण भी किया गया है। अपने उद्देश्य की सगति को ध्यान में रखते हुए जहाँ तक हो सका है पुनरुक्ति से बचने का प्रयत्न किया गया है। तथापि भारतवर्ष में गणितीय विचारधारा एवं पारिभाषिक शब्दावली की अविच्छिन्नता, विशेषकर उसके क्रमिक विकास, पर बल देने के हेतु अनेक अवसरों पर एक ही नियम की पुनरावृत्ति भिन्न-भिन्न लेखकों के शब्दों में की गयी है। इस प्रकार के तुलनात्मक अध्ययन से हमें कुछ ऐसे श्लोकों और पारिभाषिक शब्दों के पूर्ण भावों पर प्रकाश डालने में सहायता मिली है, जिनके अर्थ अब तक समझ में नहीं आ सके थे। संस्कृत के उद्धरणों का अनुवाद

करने में हमने यथामभव गाव्दिक तथा मूलानुगामी होने का प्रयत्न किया है और इस बात का ध्यान रखा है कि ऐसा करने में मूल की आत्मा का हनन न हो।

पुस्तक की उपर्युक्त अवियोजना को ग्रहण करने में हमारा ध्येय यह रहा है कि हम उन लोगों के समक्ष, जिनके लिए संस्कृत के स्रोत अगम्य हैं, प्रतिकूल और अनुकूल सभी प्रमाणों को उपस्थित करें ताकि वे हिन्दू गणित के अधिकारों के विषय में केवल हमारे कथनमात्र पर ही निर्भर न रहकर स्वयं अपना निर्णय कर सकें। अन्य देशों में की गयी गणित की उन्नति के साथ तुलना करने की सुविधा के लिए विभिन्न विषयों के विवेचन का वही क्रम रखा गया है जो प्रोफेसर डी० ई० स्मिथ कृत हिस्ट्री ऑफ मैथेमेटिक्स में मिलता है। ऐसा करने में कभी-कभी हिन्दू गणित के ग्रंथों में उपलब्ध क्रम को बदलना भी पड़ा है।

पुस्तक के लिए सामग्री एकत्र करने में हमें हिन्दुओं के विस्तृत साहित्य—गाणितिक और अगाणितिक, संस्कृत तथा प्राकृत (पाली और अर्धमागधी)—का परीक्षण करना पड़ा है। गणित में सम्बन्ध रखनेवाले हिन्दू ग्रंथों में से बहुत ही कम अब तक मुद्रित हुए हैं और जो मुद्रित भी हुए हैं वे भी सामान्य रूप से ज्ञात नहीं हैं। हस्तलिखित पुस्तकें तो, जो भारतवर्ष तथा यूरोप के पुस्तकालयों में उपलब्ध हैं, और भी कम ज्ञात हैं। इस प्रकार के अविकाशिक ग्रंथों का संग्रह करने में हम लोगों ने कोई कसर उठा नहीं रखी है। संस्कृत के गाणितिक ग्रंथों का, जिनकी चर्चा पुस्तक के अन्त में दी हुई ग्रथानुक्रमिका में की गयी है, विशेषरूप से अध्ययन किया गया है। मद्रास, बंगलौर, त्रिवेन्द्रम, त्रिपुनित्थुरा, और बनारस में स्थित पुस्तकालयों तथा इंडिया आफिस (लन्दन) और एशियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल (कलकत्ता) के पुस्तकालयों के अविकाशियों के हम कृतज्ञ हैं, जिन्होंने हस्तलिपियों की प्रतिलिपियाँ भेजकर अथवा हस्तलिपियों को ही हमारे अध्ययनार्थ कुछ समय के लिए भेजकर हमारी सहायता की है। डाक्टर आर० पी० पराजपे के भी हम कृतज्ञ हैं जिन्होंने भारतवर्ष के राजकीय पुस्तकालयों तथा इंडिया आफिस लन्दन के पुस्तकालय में हस्तलिपियों अथवा उनकी प्रतिलिपियों को प्राप्त करने में हमें सहायता प्रदान की है।

पूर्वगामी लेखकों द्वारा किये गये प्रारम्भिक कार्य के बिना हमारा अध्ययन प्रमत्त रूप में संभव न था। ऐसे लेखकों में दिवंगत पंडित सुधाकर द्विवेदी (बनारस) का नाम अग्रगण्य है, जिनके द्वारा संपादित लीलावती, ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त, त्रिशतिका, महासिद्धान्त, सिद्धान्त-नव-विवेक, इत्यादि ग्रंथों के संस्करणों

मे हमे अन्यधिक सहायता मिली है। कोलब्रुक महोदय के ब्रह्मगुप्त और भास्कर द्वितीय कृत पाटीगणित एव वीजगणित के अनुवाद, कर्न महोदय द्वारा संपादित आर्यभटीय, रंगाचार्य द्वारा संपादित और अनुवादित महावीर कृत गणित-सार-संग्रह से भी हमे बहुत सहायता मिली है। तथापि जी० आर० के की हाल की कृति अत्यन्त अविश्वसनीय सिद्ध हुई है। उनका आर्यभटीय के गणितपाद का अनुवाद, और बखाली हस्तलिपि का संस्करण अशुद्धियों में ओत-प्रोत है तथा भ्रामक है।

पुस्तक को तीन भागों में प्रकाशित करने का निश्चय किया गया है। प्रथम भाग अक-संकेत तथा अकगणित के इतिहास में सम्बन्ध रखता है। द्वितीय भाग वीजगणित पर है, जिसमें पूर्वकालीन हिन्दुओं ने असाधारण उन्नति की थी। तृतीय भाग में क्षेत्रगणित, त्रिकोणमिति, कलन तथा कुछ अन्य विषयों, जैसे भद्र (मैजिक स्क्वायर) श्रेढी, क्रमचय और सचय, का इतिहास संग्रहीत है। प्रत्येक भाग अपने-अपने विषय में पूर्ण है, अतएव विषय-विशेष में रुचि रखनेवाले व्यक्ति को सब भागों को पढ़ने की आवश्यकता नहीं है।

प्रथम भाग में, जो प्रकाशित किया जा रहा है, दो अध्याय हैं। अध्याय १ में उन सब विधियों का वर्णन है जिन्हें हिन्दू लोग अकों को सूचित करने के लिए प्रयोग में लाते थे। अक-संकेत के दशमलव स्थान-मान पद्धति के क्रमिक विकास का अनुरेखण किया गया है तथा भारतवर्ष में इस सिद्धान्त के प्रयोग से सम्बन्ध रखनेवाले सब प्रमाण प्रथम बार एकत्र किये गये हैं। इन प्रमाणों से विदित होता है कि यह पद्धति (यदि और पहले नहीं तो) ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों में भारतवर्ष में अवश्य प्रचलित थी। हमें आशा है कि जिन तथ्यों का इस अध्याय में समावेश किया गया है उनमें इस पद्धति के उद्भव-स्थान-सम्बन्धी मतभेदों का सदैव के लिए अन्त हो जायगा। स्थानाभाव के कारण अरब, उत्तरी अफ्रीका, और यूरोप में हिन्दू अकों के प्रचार का विस्तृत वर्णन नहीं किया जा रहा है। तो भी संक्षेप में वर्णन कर दिया गया है।

अध्याय २ का विषय अकगणित है। हम लोग जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग, मूल निकालना, इत्यादि गणित के मौलिक परिकर्म करने में इतने अभ्यस्त हो गये हैं कि इस बात का विचार ही नहीं करते कि इन नियमों का आविष्कार कब हुआ था। परन्तु गणित के अध्यापकों तथा इतिहासकारों के लिए यह

विषय बड़े महत्त्व का है। और जिस देश में इन नियमों का उद्भव हुआ है वहाँ तो इनके विकास का वर्णन अवश्य ही स्वागत के योग्य है। उक्त परिकर्मों को पाटी पर करने की विभिन्न विधियों का, जिनका प्रयोग पाँचवीं शताब्दी में ही भारतवर्ष में किया जा रहा है, हमने विस्तारपूर्वक वर्णन किया है। यह भी प्रदर्शित किया है कि आधुनिक काल में प्रचलित विधियाँ प्राचीन हिन्दू विधियों के साधारण रूपान्तर-मात्र हैं। त्रैगुणिक, कल्पना का नियम, व्याज, विनिमय तथा सुवर्ण मन्वन्धी नियम हिन्दुओं की देन हैं। वस्तुतः सम्पूर्ण प्रारम्भिक गणित हिन्दुओं में आरम्भ होता है। अतएव अध्याय २ के महत्त्व के मन्वन्ध में जो भी कहा जाय अतिशयोक्ति न होगी।

जिन स्रोतों में सहायता ली गयी है उनका उल्लेख टिप्पणियों में कर दिया गया है। विशेष सहायताप्रद पुस्तकों में से बूलर कृत इंडियन पैलियोग्रैफी और ओझा कृत भारतीय प्राचीन लिपिमाला के नाम उल्लेखनीय हैं।

लखनऊ
मिर्तम्बर, १९३५

बिभूतिभूषण दत्त
अवधेशनारायण सिंह

भूमिका

प्रस्तुत पुस्तक डा० विभूतिभूषण दत्त और डा० अवधेग नारायण सिंह के सुविस्तार ग्रंथ 'हिस्ट्री ऑफ हिन्दू मैथेमेटिक्स' के भाग १ का हिन्दी अनुवाद है। हिन्दू गणित के इतिहास पर इस समय हिन्दी में कोई ग्रंथ नहीं है, आशा है कि इस पुस्तक के प्रकाशन से इस अभाव की पूर्ति होगी।

अनुवाद करने में इस बात का ध्यान रखा गया है कि विषय शुद्ध और स्पष्ट हो और जहाँ तक सम्भव हो मूल के अनुरूप हो। अतएव उन स्थलों का अनुवाद करने में जो अँगरेजी मस्करण में अनुवाद के रूप में उद्धृत थे, मूलग्रंथों का आश्रय लिया गया है। इस प्रकार मस्कृत के गणितीय ग्रंथों के उद्धरणों का अनुवाद उन ग्रंथों के मस्कृत-मूल पर आधारित है। लैटिन भाषा के कुछ उद्धरण जो अँगरेजी मस्करण में ज्यों के त्यों दे दिये गये थे, इस पुस्तक में हिन्दी में अनुवादित कर दिये गये हैं।

डा० दत्त और सिंह की पुस्तक का प्रकाशन आज से लगभग २० वर्ष पूर्व हुआ था। इन २० वर्षों में हिन्दू गणित के इतिहास के सम्बन्ध में हमारे ज्ञान में यद्यपि कोई विशेष प्रगति नहीं हुई है, तो भी कुछ नवीन बातें ज्ञात हुई हैं। इनमें से जो आवश्यक और प्रासंगिक समझ पड़ी, प्रस्तुत पुस्तक में सम्मिलित कर ली गयी हैं। यहाँ पर केवल वसुभिन्न (१०० ई०) के उस उद्धरण की ओर ध्यान आकर्षित करना उचित होगा जो जानारक्षित-कृत 'तत्त्व-मग्नह' पर कमलशील की टीका में मिला है। इस उद्धरण में दार्शनिक विषय को स्पष्ट करने के लिए दृष्टांत के रूप में दशमलव स्थान-मान मिटान्त का प्रयोग किया गया है, जिससे यह निश्चित रूप में सिद्ध होता है कि प्रथम शताब्दी के अन्त तक दशमलव स्थान-मान का भाग्यवर्ष में इतना अधिक प्रचार हो चुका था कि दार्शनिक लोग अपने विषय के प्रतिपादन में निश्चय होकर इसका प्रयोग करने लगे थे। इस महत्वपूर्ण तथ्य के लिए मैं श्रेष्ठ स्वामी विद्यारण्य (भूतपूर्व डा० विभूतिभूषण दत्त) का ऋणी हूँ जिन्होंने मेरा ध्यान इस ओर आकृष्ट किया था।

कही-कही पर मूल की बातों में कुछ हेर-फेर किये गये हैं। उदाहरणार्थ वर्गमूल और घनमूल की प्राचीन हिन्दू प्रक्रियाओं के स्पष्टीकरण में कुछ आवश्यक सुधार किये गये हैं। पुस्तक में प्रयुक्त ग्रंथकारों के काल में भी कुछ मसौदा किये गये हैं, जैसे भास्कर प्रथम का समय ६०९ ई० कर दिया गया है जो भास्कर प्रथम के 'आर्यभटीय-भाष्य' का रचनाकाल है। इस प्रकार की कुछ अन्य बातों में भी अन्तर मिलेगा।

पुस्तक हिन्दी भाषी समार के लिए लिखी गयी है, अतएव भारतीय विद्वानों के नाम तथा अहिन्दी पुस्तकों और पत्रिकाओं के नाम, जिनका पुस्तक में उल्लेख हुआ है, हिन्दी में दिये गये हैं।

इस पुस्तक के सम्बन्ध में मुझे कई मित्रों से सहायता मिली है, उन्हें धन्यवाद प्रदान करते हुए मुझे अत्यन्त हर्ष होता है। अपने गुरु डा० गोरखप्रसाद जी का मैं विशेषरूप से कृतज्ञ हूँ जिनसे मुझे कई प्रकार की सहायता प्राप्त हुई है।

कृपाशकर शुक्ल

विषयानुक्रमिका

अध्याय १

अक-सकेत

	पृष्ठ
१ प्राचीन भारतवर्ष की एक झलक	१
२ हिन्दू और गणित-शास्त्र	३
गणित की प्रगति—हिन्दुओं की शिक्षा में गणित का स्थान	
३ हिन्दू गणित और उसका विकास	५
४ अक-सम्बन्धी परिभाषाएँ	७
अक-सकेत का आधार—अक-स्थान—बोलचाल की भाषा में अक	
५ अक-सकेत का विकास	१३
प्राचीन भारत में लेखन-क्रिया—प्राचीनतम अक	
६ खरोष्ठी के अक	१८
प्रारम्भिक उपलब्धि—आकार और उत्पत्ति	
७ ब्राह्मी के अक	२२
प्रारम्भिक उपलब्धि और आकार—अक-सकेतों से अक्षर—उनकी उत्पत्ति में सम्बन्ध रखनेवाले मिथ्यान्त—अक्षर-सकेत में सम्बन्ध—इन्द्रजी का मत—आविष्कार का समय—सारांग	
८ दशमलव स्थान-मान पद्धति	३४
महत्त्वपूर्ण लक्षण—आकार—नागरी लिपि के आकार—पुरालेख सम्बन्धी उदाहरण—उपर्युक्त लेखों की कल्पित अविश्वसनीयता—नवीन पद्धति के आविष्कार का स्थान—आविष्कारक अज्ञान—आविष्कार का समय	
९ प्राचीन पद्धति का अन्त	४७
१० शब्दाक पद्धति	४८
पद्धति का वर्णन—शब्दाकों की सूची—स्थान-मान के बिना	

शब्दाको का प्रयोग—शब्दाक पद्धति में स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग—पुरालेखों में शब्दाक—उत्पत्ति और प्रारम्भिक इतिहास—आविष्कार का समय

- ११ अक्षर-संकेत ५८
 आर्यभट्ट प्रथम का अक्षर-संकेत—नियम का स्पष्टीकरण—
 कटपयादि पद्धति—अक्षरपल्ली—अन्य अक्षर पद्धतियाँ
- १२ शून्य का सांकेतिक चिह्न ७०
 प्रारम्भिक प्रयोग—शून्य का आकार—शून्य-सूचक चिह्न के
 अन्य प्रयोग
- १३ भारतीय साहित्य में स्थान-मान संकेत ७६
 जैन आगम ग्रन्थ—पुराण—दार्शनिक ग्रन्थ—माहिन्विक
 ग्रन्थ
- १४ स्थान-मान सिद्धान्त के आविष्कार का समय ८१
- १५ अरब में हिन्दू-अंक ८३
- १६ यूरोप में हिन्दू-अंक ८६
 द्वैधियम समस्या—निश्चित प्रमाण
- १७ हिन्दू अंकों के विविध उल्लेख ९०
 मीरिया के उल्लेख—अरब के उल्लेख—हिन्दमा आदि
 शब्द—यूरोपीय उल्लेख
- १८ मारिणी ९६

भाग २

अक-गणित

- १ सामान्य निरीक्षण ११७
 परिभाषा और विस्तार—उपलब्ध ग्रन्थ—लेखन और
 अध्यापन—गणित की अवन्ति—मौलिक परिकर्म
- २ भक्तित १२३
 परिभाषा—करण—क्रम विधि—उत्क्रम विधि

३	व्यवकलित	१२५
	परिभाषा—करण—क्रम (या अनुलोम) विधि—उत्क्रम विधि	
४	गुणन	१२६
	परिभाषा—गुणन की विधियाँ—कपाट-सन्धि विधि—पश्चिम मे प्रवेश—गेलोसिया विधि—तिर्यक्-गुणन विधि—स्थान-खण्ड गुणन—गोमूत्रिका विधि—रूप-खण्ड गुणन—बीजीय विधि	
५	भाग	१४२
	परिभाषा—करण—भाग की विधि	
६	वर्ग	१४७
	परिभाषा—करण—वर्ग करने की गौण विधियाँ	
७	घन	१५४
	परिभाषा—करण—घन निकालने की गौण विधियाँ	
८	वर्गमूल	१६०
	परिभाषा—करण	
९	घनमूल	१६५
	परिभाषा—करण	
१०	क्रिया की शुद्धता की परीक्षा	१७१
११	भिन्न	१७५
	प्रारम्भिक प्रयोग—नाप और तौल—परिभाषा—भिन्नो का लेखन—भिन्नो का अपवर्तन—भिन्नो का समच्छेदीकरण— मिश्र भिन्न—निरुद्ध—परिकर्माष्टक—सकलित और व्यवकलित—गुणन—भाग—वर्ग और वर्गमूल—घन और घनमूल—एकाशक भिन्न	
१२	त्रैराशिक	१८३
	परिभाषा—करण—व्यस्त त्रैराशिक—त्रैराशिक की प्रशंसा— पश्चिम के देशों में त्रैराशिक—मिश्रानुपात—विधि—त्रैराशिक, दशाविशेष के रूप में	
१३	व्यावसायिक प्रश्न	२०६
	प्राचीन भारत में व्याज—हिन्दू गणित में व्याज—वर्ग-समी-	

करण पर प्रश्न—व्याज सम्बन्धी विविध प्रश्न—वस्तुओं का
विनिमय—अन्य प्रकार के व्यावसायिक प्रश्न

१४ विविध प्रश्न २१७

डण्टकर्म—विलोम-विधि—मिश्रण सम्बन्धी प्रश्न वग-समी-
करण पर प्रश्न—अज्ञात राशि के वर्ग पर प्रश्न

१५ शून्य गणित २२४

अकगणित में शून्य—बीजगणित में शून्य—परमान्व राशि के
रूप में शून्य—अनन्त—अनिर्णीत स्वरूप

ग्रथानुक्रमणिका २३३

अध्याय १

अंक-संकेत

१. प्राचीन भारतवर्ष की एक झलक

भारतवर्ष के प्राचीन इतिहास का विद्यार्थी हिन्दुओं की उस विस्मयजनक उन्नति को देखकर विमुग्ध हो जाता है जो उन लोगों ने, कला और विज्ञान दोनों क्षेत्रों में, अत्यन्त प्राचीन काल में सुसम्पादित कर ली थी। मोहेंजो-दड़ो में (पुरातत्त्व सम्बन्धी खुदाई के फलस्वरूप) किये गये अनुसन्धानों से पता चलता है कि ईसा के लगभग ३००० वर्ष पूर्व भिन्दु देश के निवासी, हिन्दू लोग, ईंटों के मकान बनाते थे, नगरों का नियोजन करते थे, सोना, चाँदी, ताँबा और जस्ता आदि धातुओं का प्रयोग करते थे, तथा अत्यन्त सुव्यवस्थित जीवन व्यतीत करते थे। प्राचीनतम उपलब्ध ग्रन्थ, वेद (लगभग ३००० ई० पू०, अथवा सम्भवतः इसमें अधिक प्राचीन), यद्यपि विशेषकर देवताओं के गुणगान अथवा वन्दना-मात्र है, तो भी उच्च सभ्यता के द्योतक है। वेदों के बाद का ब्राह्मण साहित्य (लगभग २०००-१००० ई० पू०) अशत धार्मिक और अशत दार्शनिक है। इन ग्रन्थों में आध्यात्मिक, सामाजिक, एवं धार्मिक दर्शन की भली भाँति विकसित पद्धतियाँ तथा आधुनिक सभ्यता के निर्माण में सहायता प्रदान करनेवाली अधिकांश कलाओं और विज्ञानों के बीज दृष्टिगोचर होते हैं। और इन्हीं ग्रन्थों में ही हमें गणित (अकगणित, क्षेत्रगणित और बीजगणित आदि) तथा गणित ज्योतिष का श्रीगणेश मिलता है। इस ब्राह्मण काल के बाद लगभग २००० वर्षों में कुछ अधिक समय पर्यन्त भारतवर्ष अविच्छिन्न उन्नति एवं महत्त्वपूर्ण कार्यों का क्षेत्र बना रहा। यद्यपि इस काल में अनेक विदेशी आक्रमण और आभ्यन्तरिक युद्ध हुए तथा बहुत से राज्यों का उत्थान एवं पतन हुआ, परन्तु मानसिक उन्नति में कोई विच्छिन्नता नहीं आने पायी। इसका श्रेय विशेषकर हिन्दू समाज की व्यवस्था को है। विदेशी आक्रमणकारी बाधक नहीं सिद्ध हुए, वरन् नया रक्त

जोड़कर उन्होंने हिन्दू समाज को अधिक शक्तिशाली बनाया और उन्नति में योग दिया। वे भारतवर्ष की भूमि में बसे गये, विजित लोगों के धर्म एवं रीति-रिवाजों को उन्होंने अपनाया, यहाँ तक कि हिन्दू समाज में वे पूर्ण रीति में घुल-मिल गये। उस समय कुछ लोग, जो ब्राह्मण कहलाते थे, ऐसे थे जिन्होंने निर्धनता स्वीकार की और पीढ़ी दर पीढ़ी विज्ञान और कला, धर्म एवं दर्शन की उन्नति की ओर अपने को समर्पण किया। ब्राह्मणों की निःस्वार्थता एवं बुद्धिमत्ता के कारण राजाओं और जन-साधारण में उनका विशेष आदर था। वे शास्त्रकार थे तथा राजाओं के सलाहकार थे। वास्तव में राज्य-प्रबन्ध की बागडोर ही नि स्वार्थी एवं विद्वान लोगों के हाथ में थी।

लगभग १०००-६०० ई० पू० में आदिकवि वाल्मीकि ने रामायण महाकाव्य की रचना की, लगभग ७०० ई० पू० में वैयाकरण पाणिनि ने मस्कृत व्याकरण को सुसम्पन्न किया, और ६०० ई० पू० के लगभग सुश्रुत ने आयुर्वेद तथा शल्यशास्त्र पर ग्रन्थ लिखे।^१ सौ वर्ष बाद महावीर और गौतम बुद्ध ने धर्म एवं नीतिशास्त्रों तथा निर्वाण मार्ग का उपदेश किया। इन धर्मों के फैलते ही जैन और बौद्ध साहित्य का विकास हुआ। पहले के कुछ पुराण और धर्मशास्त्र प्रायः इसी समय लिखे गये थे। तथापि ऐसा प्रतीत होता है कि ४०० ई० पू० में लग कर ४०० ईसवी तक का समय महत्त्वपूर्ण कार्यों तथा उन्नति का युग था। इसी काल में जैन तत्त्वज्ञानों उमास्वाति, वैयाकरण एवं दार्शनिक पतञ्जलि, राजनीतिज्ञ कौटिल्य, रमज नागार्जुन, वैद्य चरक, एवं अमरकवि अश्वघोष, भास और कालिदास उत्पन्न हुए। इसी समय मौर, पैतामह, वासिष्ठ और पाराशर आदि ज्योतिष के महान् मिद्धान्तों की रचना हुई, और दशमलव स्थान-मान संकेत परिष्कृत किया गया।

२ हिन्दू और गणित-शास्त्र

गणित की प्रशंसा

कहा जाता है कि प्राचीन भारतवर्ष में किसी विज्ञान ने न तो स्वाधीन अस्तित्व ही प्राप्त किया और न उसका स्वतन्त्र रूप में विकास ही हुआ। वैदिक-

^१ इस अनुच्छेद के अन्तर्गत वर्णन किये गये प्रागैतिहासिक ग्रंथों तथा व्यक्तियों के काल के संबंध में अत्यधिक मतभेद है। हमने वही काल दिये हैं जो सर्वोत्कृष्ट प्रतीत होते हैं।

कालीन भारत में जिन किसी विज्ञान का जो कुछ भी मिलता है, उसकी उत्पत्ति और विकास किसी न किसी वेदाग के अन्तर्गत, और इसलिए वैदिक क्रियाओं के महायत्तार्थ, माना जाता है। कभी-कभी यह भी कल्पना की जाती है कि वैदिक-कालीन हिन्दू लोग किसी विज्ञान की विशेष उन्नति को निरुत्साहित करते थे, यह समझकर कि वह, उनकी चित्तवृत्ति को अन्य मार्गों की ओर ले जाकर, उनकी ब्रह्म-ज्ञान की खोज में बाधक सिद्ध होगी। वस्तुतः यह धारणा सर्वथा सत्य नहीं है। कदाचित् यह सत्य है कि प्रारम्भिक वैदिक काल में विज्ञानों का विकास इसलिए हुआ कि वे धर्म में सहायक थे। परन्तु साधारणतया यह देखा गया है कि प्रत्येक काल और प्रत्येक देश में लोगों का किसी ज्ञानविशेष में अनुराग सदैव कुछ विशेष कारणों से ही हुआ है। प्राचीन हिन्दुओं का अधिकतर समय धर्म-कर्म में व्यतीत होता था। अतएव यह अस्वाभाविक नहीं है कि अन्य विषयों का ज्ञान उसी के सहायतार्थ बढ़ा और उसी के अन्तर्गत रखा गया। यह दिखाने के लिए पर्याप्त प्रमाण है कि समय पाकर सभी विज्ञान अपने मूल उद्देश्य का अतिक्रमण कर गये और उनका स्वतन्त्र रूप से विकास हुआ। इसमें सन्देह नहीं कि वैदिक काल के उत्तरार्ध में एक नवीन धारा वह निकली।

छादोग्य उपनिषद्^१ में एक कथानक है जिसका महत्त्व हमारी धारणा की पुष्टि के लिए बड़े मूल्य का है। कथानक इस प्रकार है — किसी समय नारद, नन्तुमार ऋषि के पास गये और उनसे ब्रह्म विद्या पढ़ाने की प्रार्थना की। नन्तुमार ने नारद से पूछा कि वे कौन-कौन सी विद्याएँ पहले ही से पढ़े हैं, जिसमें वे विचार कर सकें कि उन्हें अब क्या पढ़ना शेष रहा है। इस पर नारद ने उन सब विद्याओं को गिनाया जो वे पढ़ चुके थे। इस सूची में नक्षत्र-विद्या (ज्योतिष), और राशि-विद्या (अकगणित) भी सम्मिलित है। इससे स्पष्ट है कि गणित का ज्ञान, अथवा कोई अन्य लौकिक ज्ञान, आध्यात्मिक ज्ञान में बाधक नहीं समझा जाता था। वस्तुतः उस काल में लौकिक ज्ञान (अपरा-विद्या) को आध्यात्मिक ज्ञान (परा-विद्या) का सहायक अंग समझते थे।^२

जैनों ने भी गणित की उन्नति को महत्त्व प्रदान किया था। उनका धार्मिक साहित्य साधारणतः चार भागों में विभक्त है, जो अनुयोग कहलाते हैं।

^१ छादोग्य उपनिषद्, ७, १, २, ४।

^२ मुण्डकोपनिषद्, १, १, ३-५।

उनमें से एक गणितानुप्रोग है। मर्यादा (अकगणित, अर्थात् अकगणित और ज्योतिष) का ज्ञान जैन मुनियों की मुख्य साधना बतलायी गयी है।^१ बौद्ध साहित्य में भी अकगणित (गणना, सख्यान) को प्रमुख एवं श्रेष्ठतम कला माना गया है।^२ इन सबसे भी भाँति अनुमान लगाया जा सकता है कि प्राचीन भारत में गणित की उन्नति को कितना महत्त्व और मूल्य प्राप्त था।

गणित की प्रगति में निम्नलिखित कथन यद्यपि बहुत वाद का है तो भी मनोरंजक सिद्ध होगा, विशेषकर इसलिए कि वह अपने समय के श्रेष्ठतम गणितज्ञ महावीराचार्य की लेखनी से अवतरित हुआ है

“लौकिक, वैदिक, तथा सामयिक जो जो व्यापार है उन सबमें गणित (सख्यान) का उपयोग है। कामशास्त्र, अर्थशास्त्र, गान्धर्वशास्त्र (गायन), नाट्यशास्त्र, पक्षशास्त्र, आयुर्वेद, वास्तुविद्या आदि वस्तुओं में, छन्द, अलंकार, काव्य, तर्क, व्याकरण इत्यादि में, तथा कलाओं के समस्त गुणों में गणित अत्यन्त उपयोगी है। सूर्य आदि ग्रहों की गति (को ज्ञात करने) में, ग्रहण में, ग्रहों की युति में, प्रश्न (‘दिक्, देश और काल’ को ज्ञात करने) में, चन्द्रमा के परिलेख में, सर्वत्र गणित अगोचर है। द्वीपों, समुद्रों और पर्वतों की सख्या, व्यास और परिधि, लोक, अन्तर्लोक, ज्योतिर्लोक, स्वर्ग और नरक के रहनेवाले सबके श्रेणी-चक्र भवनों, मन्त्र भवनों एवं गुम्बदाकार मन्दिरों के प्रमाण तथा अन्य विविध प्रमाण गणित की सहायता से ही जाने जाते हैं। वहाँ पर प्राणिमों के सख्यान, उनकी आयु और आठ गुण इत्यादि, यात्रा आदि तथा संहिता आदि से सम्बन्ध रखने वाले विषय, सभी गणित पर निर्भर हैं। अधिक कहने से क्या प्रयोजन ? सचराचर त्रैलोक्य में जो कुछ भी वस्तु है उसका अस्तित्व गणित के बिना संभव नहीं हो सकता।

“कृतार्थ, पूज्य और जगन् के स्वामी तीर्थंकरों की शिष्य प्रशिष्यात्मक प्रसिद्ध गुह्यपरंपरा में आये हुए मर्यादावादी मनुष्य में से — समुद्र से रत्न को भाँति, पाषाण से काच को भाँति तथा गुह्य से मन्त्राण की भाँति — कुछ सार निकालकर,

^१ भगवती-सूत्र, सूत्र ६०, उत्तगन्ययन-सूत्र, २५ ७, ८, ३८।

^२ विनयपिटक, ओलडनवर्ग द्वारा संपादित, जिल्द ४, पृष्ठ ७, मज्झिम-निकाय जिल्द १, पृ ८५, चुल्लनिदेश, पृ १६६।

में गणितसारसग्रह (नामक) ग्रन्थ अपनी मति-शक्ति के अनुसार कहता हूँ, जो लघु होते हुए भी अनल्पार्थक है।”^१

हिन्दुओं की शिक्षा में गणित का स्थान

हिन्दुओं की शिक्षा का प्रारम्भिक काल ५ वर्ष की अवस्था से लेकर १२ वर्ष की अवस्था तक था। राजा-महाराजाओं के लड़कों के लिए इसमें कुछ अन्तर था। अध्ययन के मुख्य विषय लिपि अथवा लेखा (वर्णमाला, लेखन और पठन), रूप (ड्रिग एव क्षेत्रगणित), और गणना (अकगणित) थे। कौटिल्य के अर्थशास्त्र में लिखा है कि चूडाकर्म के बाद विद्यार्थी को लिपि (वर्णमाला) और सख्यान (अकगणित) सीखना चाहिए।^२ हाथीगुफा के अन्तर्लेख^३ से पता चलता है कि कलिंग नरेश खारवेल ने अपने जीवन के नौ वर्ष (१६ वर्ष की अवस्था से लेकर २५ वर्ष तक की अवस्था तक) लेखा, रूप और गणना के अध्ययन में व्यतीत किये थे। राजकुमार गौतम ने ८ वर्ष की अवस्था में अध्ययन प्रारम्भ किया था — “पहले लेखना सीखा था और उसके पश्चात् अकगणित, जो (उस समय के) ७२ विज्ञानों और कलाओं में सबसे अधिक महत्त्व के थे।”^४ जैन आगम-ग्रन्थों में भी लेखा, रूप और गणना का उल्लेख मिलता है।^५

३ हिन्दू गणित और उसका विकास

गणित शब्द का शाब्दिक अर्थ है ‘वह शास्त्र जिसमें गणना की प्रधानता है।’ यह शब्द बहुत प्राचीन है और वैदिक साहित्य में बहुतायत से मिलता है। वेदगज्योतिष नामक ग्रन्थ वेदांग-शास्त्रों में इसे सबसे ऊँचा स्थान प्रदान करता है—‘जिम प्रकार मयूरो की शिखाएँ एव नागों की मणियाँ (सबसे ऊँचे स्थान पर होती हैं) हैं, ठीक उसी प्रकार वेदांग-शास्त्रों में गणित का

^१ गणित-सार-सग्रह, अध्याय १, श्लोक ६-१६।

^२ अर्थशास्त्र, आर० शाम शास्त्री द्वारा संपादित, १५, २, अंगरेजी अनुवाद, पृ० १०।

^३ हाथीगुफा ऐण्ड श्री अदर इस्क्रिप्शंस, भगवानलाल इद्रजी द्वारा संपादित, पृ० २२।

^४ अन्तर्गड-दसाओ ऐण्ड अनुत्तरवत्साइय-दसाओ, एल० डी० वार्नेट-कृत अंगरेजी अनुवाद, १९०७, पृ० ३०, देखिए भद्रबाहुकृत कल्पसूत्र, सूत्र २११।

^५ उदाहरणार्थ, देखिए समवायाङ्ग-सूत्र, सूत्र ७२।

स्थान सत्रमे ऊँचा है।^१ प्राचीन बौद्ध साहित्य में तीन प्रकार के गणित का उल्लेख मिलता है (१) मुद्रा, (२) गणना और (३) मस्यान। इन तीनों का एक प्राचीनतम उल्लेख दीर्घ निहाय^२ में मिलता है। विनयपिटक,^३ दिव्यावदान^४ और निलिन्दपञ्चो में भी इनका वर्णन मिलता है। गणित के अर्थ में सस्यान का प्रयोग अनेक प्राचीन ग्रंथों में मिलता है।^५ इतने प्राचीन काल में गणित में ज्योतिष भी सम्मिलित था, परन्तु क्षेत्रगणित कल्पसूत्र नामक अन्य विज्ञान के अन्तर्गत था।

लोगों का विचार है कि ईसवी मनु के आरम्भ के कुछ समय पहले हिन्दू गणित की जागृति का काल था।^६ इस जागृति का प्रभाव हिन्दू गणित के विस्तार पर विशेष रूप से पड़ा। ज्योतिष स्वतन्त्र विषय हो गया और क्षेत्रगणित इसका अंग हो गया। प्रारम्भिक जागृति-काल में हिन्दू गणित के अन्तर्गत ये विषय थे—परिकर्म, व्यवहार, रज्जु (“रस्सी”, अर्थात् क्षेत्रगणित), राशि (“वैरा-शिक”), कलासवर्णन (“भिन्न सम्बन्धी परिकर्म”), यावत्तावत् (“जितना उतना”, अर्थात् अज्ञात राशि का प्रयोग), वर्ग, घन, वर्गवर्ग (“चतुर्धात”) तथा विकल्प (“क्रमचय और मचय”)।^७

^१ “यथा शिक्षा मयूराणां नागानां मणयो यथा।

तद्वद्देशगशास्त्राणां गणितं मूर्धनि स्थितम् ॥” (वेदांग-ज्योतिष, श्लोक ४)

^२ १, पृ. ५१।

^३ ४, पृ. ७।

^४ दिव्यावदान, ई० बी० कॉवेल तथा आर० ए० नील द्वारा संपादित, कैम्ब्रिज, १८८६, पृ. ३, २६, और ८८।

^५ मिहिन्दपञ्चो, राडम डेविड्स-कृत अंगरेजी अनुवाद, ऑक्सफोर्ड, १८६०, पृ. ६१।

^६ उदाहरणार्थ देखिए भद्रबाहु-कृत कल्पसूत्र, एच० याकोबी द्वारा संपादित, लाइपजिग, १८६७, भगवती-सूत्र, बम्बई, १९१८, पृ. ११२, अर्थशास्त्र, १.५.२।

^७ विभूतिभूषण दत्त, “दि स्कोप ऐण्ड डेवेलपमेंट ऑफ हिन्दू गणित”, इंडियन हिस्टोरिकल क्वार्टरली, जिल्द ५, १९२६, पृ. ४७६-५१२।

^८ “परिकर्म व्यवहारो रज्जु राशि कलासवर्णने य।

जायन्तावन्ति षण्णो घन्ते ततह् वगवग्नो विकल्पो त ॥”

(स्थानागसूत्र, सूत्र ७४७)

इस प्रकार गणित शब्द सामान्य गणित के अर्थ में प्रयुक्त होने लगा, मुद्रा और गणना इसकी परिधि के बाहर हो गये। गणित में आनेवाली क्रियाओं को करने के लिए लेखन-सामग्री का प्रयोग अनिवार्य था। ये क्रियाएँ या तो पाटी पर खडिया से की जाती थी, अथवा पाटी पर धूल बिछाकर किसी नुकीली कलम से। इस प्रकार गणित के अर्थ में पाटीगणित अथवा धूलिकर्म शब्दों का प्रयोग किया जाने लगा। आगे चलकर गणित का वह भाग जो अज्ञात राशि से सम्बन्ध रखता था बीजगणित कहलाने लगा। यह पृथक्करण सबसे पहले ब्रह्मगुप्त ने किया था, परन्तु उन्होंने बीजगणित शब्द का प्रयोग नहीं किया। ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त का वह अध्याय जो बीजगणित से सम्बन्ध रखता है, 'कुट्टकाध्याय' कहलाता है। श्रीधराचार्य ने पाटीगणित और बीजगणित को पृथक् माना है और उन पर भिन्न भिन्न ग्रन्थों की रचना की। पाटीगणित और बीजगणित का यह अन्तर परवर्ती लेखकों ने यथावत् बनाये रखा।

प्राचीन भारत के गणित की स्थिति और विस्तार का सारांश देकर अब हम प्रस्तुत विषय, अर्थात् 'गणित की विभिन्न शाखाओं के विकास और उन्नति' की ओर अग्रसर होते हैं। सबसे पहले हम हिन्दू गणित की गणना-पद्धति का विवेचन करेंगे।

४ अक-सम्बन्धी परिभाषाएँ

अक-संकेत का आधार

यह निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि भारतवर्ष में अत्यन्त प्राचीन काल से गणना का आधार दस रहा है।^१ वास्तव में, दस के अतिरिक्त किसी अन्य आधार के विस्तृत प्रयोग का कोई भी चिह्न सम्स्कृत साहित्य भर में नहीं मिलता। यह भारतवर्ष की एक विशेषता है कि अत्यन्त प्रारम्भिक काल में ही बड़े बड़े अंकों को सूचित करनेवाली सख्याएँ दृष्टिगोचर होती हैं। जबकि यूनानियों के पास १०^४ ("मिरियड") और रोमन लोगों के पास १०^६ ("मिले") में बड़ी सख्याओं को व्यक्त करनेवाली कोई भी मजा नहीं थी, प्राचीन हिन्दुओं के पास लगभग अठारह अंकों तक की

^१ इसके बहुत से उदाहरण ऋग्वेद में मिलने हैं, जिनका मैकडॉनल और कोथ ने संग्रह किया है, देखिये वेदिक इंडेक्स, जिल्द १, पृ ३४३।

सहस्राओ को सूचित करनेवाली मज्ञाएँ विद्यमान थी। आवृत्तिक युग में भी समार के किमी देश की अक-मज्ञाएँ उतनी वैज्ञानिक एवं पूर्ण नहीं हैं जितनी कि हिन्दुओ की हैं।

यजुर्वेद सत्ता (वाजमनेयी)^१ में निम्नलिखित अक-मज्ञाओ की सूची दी हुई है एक (१), दश (१०), शत (१००), सहस्र (१,०००), अयुत (१०,०००), नियुत (१,००,०००), प्रयुत (१०,००,०००), अर्वुद (१,००,००,०००), न्यर्वुद (१०,००,००,०००), समुद्र (१,००,००,००,०००), मध्य (१०,००,००,००,०००), अन्त (१,००,००,००,००,०००), और परार्ध (१०,००,००,००,००,०००)। यही सूची तैत्तिरीय संहिता में भी दो स्थानों पर मिलती है।^२ मैत्रायणी^३ और काठक^४ संहिताओं में भी यही सूची कुछ अंतर के साथ मिलती है। पचविंश ब्राह्मण में न्यर्वुद तक यजुर्वेद की ही सूची है, न्यर्वुद के बाद निखर्व, वाडव, अक्षिति, इत्यादि मज्ञाएँ मिलती हैं। सास्यायन श्रौतसूत्र में न्यर्वुद के बाद निखर्व, समुद्र, मलिल, अन्त्य, अनन्त (१,००,००,००,००,००,०००) आदि मज्ञाएँ दी हैं। इन सभी मज्ञाओं में आगे वाली मज्ञा अपने पीछे वाली मज्ञा से दस गुनी अधिक है, इसलिए इन मज्ञाओं को 'दशगुणोत्तर मज्ञाएँ' कहते हैं।

आगे चल कर हम देखते हैं कि पाँचवीं शताब्दी ईसवी पूर्व में शतगुणोत्तर मज्ञाओं की वृद्धि के लिए कई प्रयत्न किये गये, जो सफल सिद्ध हुए। नीचे हम प्रथम शताब्दी ई० पू० में लिखे गये सुप्रसिद्ध बौद्ध ग्रंथ ललितविस्तार से गणितज्ञ अर्जुन और राजकुमार गौतम (त्रोविसत्व) के सवाद को उद्धृत करते हैं, जिसमें इस शतोत्तर गणना पर प्रकाश पड़ेगा

‘गणितज्ञ अर्जुन ने त्रोविसत्व से पूछा—नवयुवक। क्या तुम कोटि के आगे की शतोत्तर गणना जानते हो?’

^१ यजुर्वेद संहिता, १७ २।

^२ ४ ४० ११ ४, और ७ २ २० १।

^३ २ ८ १४, इस सूची में अयुत, प्रयुत के बाद पुन अयुत है, और उसके बाद न्यर्वुद, समुद्र, मध्य, अन्त और परार्ध आते हैं।

^४ १७ १०, यह सूची भी पूर्ववत् है, केवल इतना अन्तर है कि नियुत और प्रयुत का स्थान-भेद हो गया है।

^५ १५ ११ ४।

^६ देखिए भास्कर द्वितीय-कृत लीलावती, पृ० २।

बोधिसत्व—हाँ, जानता हूँ।

अर्जुन—तो बताओ, कोटि के आगे की गणना किस प्रकार है ?

बोधिसत्व—मौ कोटि, अयुत कहलाता है, सौ अयुत, नियुत, सौ नियुत, ककर, सौ ककर, विवर, सौ विवर, क्षोभ्य, सौ क्षोभ्य, विवाह, सौ विवाह, उत्सग, सौ उत्सग, बहुल, सौ बहुल, नागवल, सौ नागवल, तितिलभ, सौ तितिलभ, व्यवस्थान-प्रज्ञप्ति, सौ व्यवस्थान-प्रज्ञप्ति, हेतुहिल, सौ हेतुहि ३, करहु, सौ करहु, हेतिवन्द्रिय, सौ हेतिवन्द्रिय, समाप्तलभ, सौ समाप्तलभ, गणनागति; सौ गणनागति, निरवद्य, सौ निरवद्य, मुद्रावल, सौ मुद्रावल, सर्ववल, सौ सर्ववल, विसज्ञागति, सौ विसज्ञा-गति, सर्वज्ञा, सौ सर्वज्ञा, विभुनगमा, सौ विभुनगमा, तल्लक्षणा।^१

दशगुणोत्तर और शतगुणोत्तर सज्ञाओं की एक मनोरजक सूची काञ्चायनकृत पाली-व्याकरण^२ में मिलती है। वह इस प्रकार है —

दशगुणोत्तर सज्ञाएँ

$$१० \times \text{दस} = \text{सत} \quad (१००)$$

$$१० \times \text{सत} = \text{सहस्र} \quad (१,०००)$$

$$१० \times \text{सहस्र} = \text{दस सहस्र} \quad (१०,०००)$$

$$१० \times \text{दस सहस्र} = \text{सत सहस्र}^१ \quad (१,००,०००)$$

$$१० \times \text{सत सहस्र} = \text{दम सत सहस्र} \quad (१०,००,०००)$$

$$१० \times \text{दम सत सहस्र} = \text{कोटि} \quad (१,००,००,०००)$$

^१ इस प्रकार तल्लक्षणा = १०^५।

इस और आगे के कथन से विदित होता है कि आर्किमिडीज से अनेक शताब्दियों पहले हिन्दू लोग ऐसी अक-सज्ञाओं की श्रेणियाँ बनाने में सिद्धहस्त थे जो 'न केवल यही व्यक्त कर सकती थीं कि पृथ्वी-पिंड के तुल्य बालू के ढेर में कितने बालू के कण होंगे, बल्कि यह भी कि संपूर्ण ब्रह्माण्ड के बराबर बालू के ढेर में कितने कण होंगे।'

देखिए, आर्किमिडीज-कृत ऑपेरा के १६५४ के संस्करण में 'डे हरेने न्यूमरो।' रिमथ और कार्पिस्कोकृत 'हिन्दू-अरेबिक न्यूमरल्स' (बोस्टन, १६११, पृ १६) में इसका उल्लेख किया गया है।

^२ देखो "ग्रामेर पाली डे काञ्चायन", जर्नल एशियाटिक, छठी श्रेणी, जिल्द १७, १८७१, पृ ४११। इसमें सूत्र ५१ और ५२ की व्याख्या भी उद्धृत की गयी है।

^३ इसे लख (लक्ष) भी कहा गया है।

कोटिगुणोत्तर मज्ञाएँ।

कोटि × कोटि = पकोटि^१

कोटि × पकोटि = कोटिपकोटि

कोटि × कोटिपकोटि = नहुत

कोटि × नहुत = निन्नहुत

कोटि × निन्नहुत = अशोभिनि

इसी प्रकार विदु, अव्वुद, निरव्वुद अहह, अवव, अतत, मोगविक, उप्पल, कुमुद, पुडरीक, पदुम, कथान, महाकथान, और अमख्येय बनते हैं।^२

अनुयोगद्वार-सूत्र^३ नामक जैन आगम में, जो ईसवी मन् के आरम्भ होने के कुछ पहले लिखा गया था, ससार के जीवों की सख्या इस प्रकार बतलायी गयी है, “(लोक के जीवों की सख्या) कोटि-कोटि आदि मज्ञाओं को महायता से (अको में) व्यक्त करने पर २९ स्थान लेती है, अथवा यह सख्या उस अक सज्ञा से अधिक है जो २४ स्थान लेती है और उस अक-सज्ञा में कम है जो ३२ स्थान लेती है, अथवा यह वह सख्या है जो २ के छोटे वर्ग (अर्थात् २^४) को २ के पाँचवे वर्ग (अर्थात् २^{११}) में गुणा करने पर प्राप्त होती है, अथवा यह वह सख्या है जो २ से ९६ बार विभाजित की जा सकती है।” जैनग्रंथों में मिलने वाली दूसरी बड़ी सख्या ‘शीर्षप्रहेलिका’ नामक काल को सूचित करती है। भाष्यकार हेमचन्द्र (जन्म १०८९ ई०) के मत में यह सख्या इतनी बड़ी है कि १९४ स्थान लेती है। इसका मान (८४,००,०००)^४ भी बतलाया गया है।

अक-स्थान

आगे चरकर जब स्थान-मान की भावना का विकास हुआ, अक-सज्ञाओं का प्रयोग अकस्थानों को सूचित करने के लिए किया गया। उदाहरणार्थ, आर्यभट्ट प्रथम (४०९ ई०) ने अक-सज्ञाओं को अक-स्थानों के अर्थ में प्रयोग किया है। वे लिखते हैं,^५ ‘एक (इकाई), दश (दहाई), शत (सैकड़ा), महस्र (हजार), अयुत

^१ इसे कोटि-कोटि भी कहा गया है। इसका मान (१०, ०००, ०००)^२ अर्थात् (१०)^{१५} है। द्रविण अनुयागद्वार-सूत्र, सूत्र १४२।

^२ इस प्रकार अमख्येय का मान (१०)^{१६} अर्थात् (१,००, ००,०००)^३ होता है।

^३ सूत्र १४२।

^४ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लो २ ।

(दस हजार), नियुत (लाख), प्रयुत (दस लाख), कोटि (करोड), अर्बुद (दस करोड), और वृन्द (अरब) स्थानों में से प्रत्येक अपने पीछे वाले से दस गुना है।^१ अक-सज्ञा के अर्थ में 'स्थान' शब्द का प्रयोग पहले पहल उपर्युक्त जैन ग्रंथ में मिलता है।

अधिकांश गणित ग्रंथों में अक-सज्ञाओं को 'स्थानों के नाम' कहते हैं, और प्रायः अठारह स्थानों के नाम दिये रहते हैं। श्रीधर (ल० ७५० ई०) द्वारा दिये हुए नाम इस प्रकार हैं ^२ 'एक, दश, शत, सहस्र, अयुत, लक्ष, प्रयुत, कोटि, अर्बुद, अवज, खर्व, निखर्व, महासरोज, शकु, सरितापति, अन्त्य, मध्य और परार्ध'। महावीर (८५० ई०) ने २४ स्थानों के नाम दिये हैं जो इस प्रकार हैं ^३ 'एक, दश, शत, सहस्र, दश सहस्र, लक्ष, दश लक्ष, कोटि, दश कोटि, शत कोटि, अर्बुद, न्यर्बुद, खर्व, महाखर्व, पद्म, महापद्म, क्षोणी, महाक्षोणी, शख, महाशख, क्षिति, महाक्षिति, क्षोभ और महाक्षोभ'।

भास्कर द्वितीय (११५० ई०) की सूची श्रीधर की सूची से मिलती है, अन्तर केवल इतना है कि 'महासरोज' और 'सरितापति' के स्थानों में क्रमानुसार उनके पर्याय-वाचक 'महापद्म' और 'जलधि' का प्रयोग है। भास्कर ने लिखा है कि स्थानों का नामकरण पूर्वाचार्यों ने क्रियात्मक व्यवहार के लिए किया था।^४

नारायण (१३५६ ई०) ने भी इसी प्रकार की एक सूची दी है, जिसमें 'अवज' के स्थान में 'सरोज', 'महामरोज' के स्थान में 'महावज' और 'सरितापति' के स्थान में 'पारावार' का प्रयोग किया गया है।^५

बोलचाल की भाषा में अक

एक से लेकर नौ तक अकों को संस्कृत में एक, द्वि, त्रि, चतुर, पञ्च, षट्, सप्त, अष्ट और नव कहते हैं। ये अक ऊपर दी हुई स्थान सज्ञाओं की सहायता में किसी भी संख्या को व्यक्त करने के लिए पर्याप्त हैं। जब दो संख्याओं को जोड़

^१ त्रिशक्तिका, सूत्र २-३। इन्हें 'दशगुणोत्तर सज्ञा' कहा गया है।

^२ गणित-सार-संग्रह १, ६३-६८।

^३ लीलावती, पृ २।

^४ यल्लय (१४८० ई०) ने आर्यभटीय की टीका में २६ अक-सज्ञाओं की एक सूची दी है, जिसकी पहली २४ सज्ञाएँ महावीर की सज्ञाओं से मिलती हैं। केवल इतना अन्तर है कि महावीर के 'शख' और 'महाशख' के स्थान में यल्लय ने 'क्षोणी' और 'महाक्षोणी' लिखा है, शेष पाँच अक-सज्ञाएँ क्रम से 'परार्ध', 'सागर', 'अनन्त', 'चिन्त्य' और 'भूरि' हैं।

कर सख्या बताने की पद्धति का प्रयोग किया जाता है, तब दोनों सख्याओं में से कोई भी पहले कही जा सकती है। अर्थात् एक-दश और दश-एक दोनों का एक ही अर्थ होगा। परन्तु स्मरणातीत काल से ही अव्यवस्थित कथन की अपेक्षा एक निश्चित क्रम को अनुसरण करने की प्रथा चली आ रही है।

संस्कृत भाषा में जिस क्रम का अनुसरण किया जाता है वह इस प्रकार है जब कोई सख्या केवल दो अंकों की होती है, तब इकाई वाला अंक पहले कहा जाता है और दहाई वाला उसके बाद, और जब कोई सख्या अधिक अंकों की होती है, तब बड़े मानवाले अंक पहले कहे जाते हैं और छोटे मानवाले अंक क्रम में उनके बाद, परन्तु इकाई और दहाई वाले दो अंकों को व्यक्त करने में पहली विधि का ही प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, यदि किसी सख्या में चार अंक हैं, तो उसे पढ़ने का सामान्य नियम यह होगा कि पहले हजार वाला अंक पढ़ा जाय और उसके बाद क्रम से सैकड़ा, इकाई और दहाईवाले। यह देखने की बात है कि सैकड़े के आगे की सख्या सूचित करने के नियम में आकस्मिक परिवर्तन देख पड़ता है। तथापि यह परिवर्तन सप्ताह की प्रायः सभी भाषाओं में समान रूप से मिलता है।^१ इस आकस्मिक परिवर्तन का कोई निश्चित कारण नहीं प्रतीत होता।

१९, २९, ३९, ४९ इत्यादि सख्याएँ ऐसे उदाहरण हैं जिन्हें बोल-चाल की भाषा में व्यक्त करने में घटाने की पद्धति का प्रयोग होता है। वैदिक काल में हम देखते हैं कि १९ के लिए 'एकान्नविंशति' (एक-कम-बीस) का और ३९ के लिए 'एकान्नचत्वारिंशत्' (एक-कम-चालीस) का प्रयोग होता था।^२ आगे चल कर (सूत्र काल में) एकान्न शब्द एकोन में बदल दिया गया था, और कभी-कभी उपसर्ग 'एक' का भी त्याग कर दिया गया था। इस काल में ऊनविंशति, ऊनत्रिंशत् आदि शब्दों का प्रयोग मिलता है जो आज तक प्रचलित हैं। नवदश, नवविंशति आदि वैकल्पिक व्यंजकों का भी कभी कभी प्रयोग होता था।^३

^१ केवल कुछ ही भाषाओं में अवरोही क्रम मिलता है। अंगरेजी भाषा में बीस तक की सख्याओं के उच्चारण में पहले इकाई और तब दहाई का प्रयोग होता है।

^२ तैत्तिरीय संहिता, ७ २ ११।

^३ नवदश=१६ (वाजसनेयी संहिता, १४ २३, तैत्तिरीय संहिता, १४. २३ ३०)।

नवविंशति=२६ (वाजसनेयी संहिता, १४ ३१)।

नवनवति=६६ (ऋग्वेद, १ ८४ १३)।

प्रायः सभी संस्कृत साहित्य पद्य में है, अतएव पद्य रचना की सुविधा के लिए संख्याओं को व्यक्त करने में कई प्रकार की युक्तियों का सहारा लिया जाता था, जिन में से सबसे अधिक प्रचलित जोड़ने का सिद्धान्त^१ था। नीचे हम, गणित के ग्रंथों से, कुछ उदाहरण दे रहे हैं, जो सामान्य रूप से मिलते हैं --

संख्या	व्यंजक	सिद्धान्त
१३९	$४० \times १०० - १$ चत्वारिंशच्चैकोनशताधिक, ^२	योग-वियोग
२९७	$३०० - ३$ त्रिंशद्दशत्रय, ^३	वियोग
१८	२×९ द्विनवक, ^४	गुणन
२७	३×९ त्रिनवक, ^५	गुणन
१२	२×६ द्विषट्, ^६	गुणन

२८,४८३ $८३ + ४०० + ४००० \times ७$ त्र्यशीतिमिश्राणि चतुस्शतानि

चतुस्सहस्रघनगान्वितानि,^७ योग-गुणन

संख्या १२३४५६५४३२१ का व्यंजक 'एकादिषडन्तानि ऋण हीनानि'^८, अर्थात् 'वह संख्या जिसमें अंक पहले १ से ६ तक क्रमशः बढ़ते हैं और तब उसी क्रम से घटते हैं' विशेष मनोरंजक है।

जो अंक 'अक्षरांक' और 'शब्दांक' के नामों से प्रसिद्ध हैं, उनका प्रयोग बड़ी संख्याओं को व्यंजित करने में होता था। इन अंकों का विस्तृत विवरण आगे दिया जायगा।

५ अक-संकेत का विकास

प्राचीन भारत में लेखन-क्रिया

सामान्य रूप से लोगों का विचार है कि अक संकेतों का आविष्कार लेखन-क्रिया के आरम्भ होने के कुछ समय बाद हुआ, और यह भी कि प्रारम्भिक

^१ त्रीणि शतानि त्रिसहस्राणि त्रिंश च नव च = ३३३६ (ऋग्वेद, ३. ६. ६, १०. ५२. ६)।

^२ गणितसार-संग्रह, १४।

^३ लीलावती, पृ. ४, उदाहरण १।

^४ आर्यभटीय, २३।

^५ त्रिशतिका, उदाहरण ४३।

^६ गणित-सार-संग्रह १०८।

^७ गणित-सार-संग्रह, १२७।

अवस्था में अक पूरे-पूरे शब्दों में लिखे जाते थे। बड़ी मस्याओं के विषय में यह धारणा सत्य प्रतीत होती है, परन्तु छोटी मस्याओं को व्यक्त करनेवाले शकेत उतने ही प्राचीन हैं जितनी कि स्वयं लेखन-क्रिया।

लेखन-क्रिया भारतवर्ष में कब प्रारम्भ हुई, इस मन्त्र में इतिहासकारों में अभी हाल तक मतभेद रहा है। कुछ कहते थे कि वैदिक काल में ही लोग लिखना जानते थे, परन्तु अधिकांश लोग जो वेवर, टेलर और ब्लर आदि के अनुयायी थे इस मत के थे कि लेखन-क्रिया भारतवर्ष में आठवीं शताब्दी ईसवी पूर्व के आम पाम पश्चिम में लायी गयी। इन लोगों के सिद्धान्त के अनुसार प्राचीन भारतीय लिपि, जैसी अगोक के अन्तर्लेखों में मिलती है, और भी अधिक प्राचीन उस लिपि में निकली है जो मिस्र और मेसोपोटामिया में मिली है। मेमिटिक उत्पत्ति का अनुमान सबसे पहले मन् १८०६ ई० में सर विलियम जोन्स ने किया था, और आगे चलकर क.प (१०२१ ई०), लेस्पियस (१८३४ ई०) आदि बहुतों ने इसका समर्थन किया था। फिर भी इस सिद्धान्त के माननेवाले पूर्णतया एकमत नहीं हैं, क्योंकि एक ओर डब्ल्यू० डेके और आइ० टेलर भारतीय लिपि को दक्षिणी मेमिटिक लिपि से व्युत्पन्न मानते हैं, दूसरी ओर वेवर और ब्लर इसे फिनिशियन अथवा किसी उत्तरी मेमिटिक लिपि से निकली हुई मानते हैं।^१ ब्लर ने दक्षिणी मेमिटिक लिपि में की गयी व्युत्पत्ति का खण्डन किया है, इस आधार पर कि उसमें अत्यधिक अनुमानों की कल्पना करनी पड़ती है, और उसके साथ-साथ उसे विश्वसनीय बनाने के लिए अक्षरों में अत्यधिक परिवर्तन करने पड़ते हैं। फिर भी उन्होंने वेवर द्वारा उत्तरी मेमिटिक लिपि से की गई व्युत्पत्ति का समर्थन किया है, और उस सिद्धान्त का विस्तृत विवरण दिया है।^२ ओझा^३ ने ब्लर के सिद्धान्त की परीक्षा विस्तार में की है, और उसे मनगढ़त एवं सचाई के प्रतिकूल बताते हुए उसको अस्वीकार किया है। उन्होंने बताया है कि फिनिशियन (उत्तरी मेमिटिक) लिपि के २२ अक्षरों में से केवल एक ही अक्षर ऐसा है जो उच्चारण में ब्राह्मी लिपि के एक अक्षर से मादृश्य रखता है। उन्होंने दोनों प्रकार के अक्षरों की एक सारिणी देकर,

^१ विभिन्न लेखकों द्वारा प्रतिपादित सिद्धान्तों के साधारण अन्तर जानने के लिए, देखिए ब्लर-कृत पैलियोग्रैफी, पृ ६, ये अन्तर टिप्पणियों में दिये गये हैं।

^२ ब्लर, पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ ६ और उसके आगे।

^३ गोरोशकर हीराचन्द ओझा, भारतीय प्राचीन लिपिमाला, पृ १८-३१।

जिसमें समान उच्चारण वाले शब्द पक्तिवद्ध किये गये हैं, अपने तर्क की अत्यन्त-मतोजनक पुष्टि की है। उन्होंने यह भी दिखाया है कि बूलर की रीति का अनुसरण करके कोई भी लिपि किसी भी अन्य लिपि से निकली हुई सिद्ध की जा सकती है।^१

अन्य विद्वानों ने, जो यह मानते थे कि लेखन-क्रिया वैदिककाल जैसे प्राचीन काल से ही भारतवर्ष में ज्ञात थी, अपने मत की पुष्टि साहित्यिक प्रमाणों के आधार पर की है। वसिष्ठ-धर्मसूत्र में, जो मूलतः ऋग्वेद की एक शाखा के अन्तर्गत था, कुछ ऐसे प्रमाण मिलते हैं जिनसे स्पष्टतया सिद्ध होता है कि वैदिक काल में लेखन-क्रिया का प्रयोग होता था। वसिष्ठ (१६ १०, १४-१५) ने लिखित प्रलेखों का उल्लेख वैध प्रमाण के रूप में किया है, और इनमें से पहला सूत्र किसी और भी प्राचीन ग्रन्थ अथवा परम्परागत ज्ञान का उद्धरण है। निम्नलिखित उद्धरण जिसमें अक ८ को लिखने का उल्लेख है स्वयं ऋग्वेद (१० ६२ ७) का ही है, 'महत्सु मे ददतो अष्टकर्ण्य', अर्थात् 'मुझे ऐसी सहस्र (गायें) प्रदान करो जिनके कानों में ८ लिखा हो।' इस अर्थ पर कुछ विद्वानों ने सदेह प्रकट किया है, परन्तु पाणिनि का समर्थन प्राप्त होने के कारण यह ठीक प्रतीत होता है।^२ ऐसा जान पड़ता है कि गौवों का अपने मालिक से सम्बन्ध सूचित करने के लिए उनके कानों में अक लिखने की प्रथा का प्राचीन भारत में पर्याप्त प्रचार था।^३

^१ हाल में बहुतेरे अन्य विद्वानों ने बूलर की उत्पत्ति के विरुद्ध अपना मत प्रकट किया है। देखिए भडारकर, "ऑरिजिन आव इंडियन ऐल्फाबेट" सर आशुतोष मुकर्जी जुबिली वाल्यूम्स, जिल्द ३, १९२२, पृ ४९३, एच सी. रे, "दि इंडियन ऐल्फाबेट" इंडियन ऐटिक्वेरो, जिल्द ३, १९२४, पृ २३३, और सर जॉन मार्शल, मोहेनजो-दड़ो ऐण्ड दि इंडस सिविलाइजेशन, १९३१, पृ ४२४, जहाँ पर यह कहा गया है: "मुझे पूर्ण विश्वास है कि ब्राह्मी लिपि को सेमिटिक लिपि से निकली हुई सिद्ध करने के सभी प्रयत्न नितान्त असफल थे।"

^२ 'कर्णों वर्णलक्षणात्' (६ २ ११२) और (६ ३ ११५) से इस अर्थ को समर्थन मिलता है।

^३ अथर्ववेद (६ १४१) में कानों पर 'मिथुन' के चिह्न बनाने की रीति का उल्लेख है। (१२ ४-६) में इस प्रथा की निंदा की गयी है। मैत्रायणी संहिता में इस विषय पर एक स्वतंत्र अध्याय है, ऐसे चिह्न बनाने की रीति का वर्णन ४. २. ६ में है।

ऋग्वेद में एक अन्य स्थान पर (१० ३४) एक जुआरी का उल्लेख आया है जो अपने भाग्य पर रोता है और कहता है कि 'एक' पर बाजी लगा कर हमने अपनी पतिव्रता स्त्री को खो दिया ।^१ अथर्ववेद (७ २५०, (५१), ५) में 'लिखे हुए धन' का उल्लेख है। पाणिनि (७०० ई० पू० के लगभग) की व्याकरण में 'यवनानि' (अर्थात् 'सैमिटिक लेख'), 'लिपिकार' और 'लिविकार' (लेखक)^२ शब्द आये हैं, जिनसे पता चलता है कि उनके समय में लेखन-क्रिया ज्ञात थी। इन उल्लेखों के अतिरिक्त, वैदिक कालीन ग्रन्थों में कुछ पारिभाषिक शब्द, जैसे अक्षर, काड (अध्याय), पटल, ग्रथ इत्यादि आये हैं जो उस समय लेखन-क्रिया का अस्तित्व सिद्ध करने के लिए प्रमाण के रूप में उद्धृत किये गये हैं। लिखित प्रलेखों के इन उल्लेखों का जब वैदिक कालीन उच्च सम्यता, विशेषकर व्यापार तथा आर्थिक लेन देन के जटिल लेखा की उन्नत दशा, ब्राह्मण ग्रंथों में गद्यात्मक प्रयोग, वैदिक ग्रंथों के मंत्र संग्रह, उनकी क्रमबद्धता, एवं विश्लेषण, तथा वेदांगों में मिलनेवाली ध्वनि और कोष सम्बन्धी अन्वेषण के साथ-साथ विचार किया जाता है तब हमें भारतवर्ष में लेखन-क्रिया का अत्यंत प्राचीन काल में अस्तित्व निर्धारित करने के लिए पर्याप्त साधन मिलता है।^३ यद्यपि इन तर्कों में पर्याप्त बल है तथापि सामान्य रूप से उनका आदर नहीं हुआ, जो कि 'अमम्भव की युक्ति' का प्रयोग होने पर मदैव होगा। आर० शामशास्त्री (१९०६ ई०) ने भारतवर्ष के प्राचीन हिरोग्लिफिक् चित्रों के आधार पर (जो कि उनके अनुसार तान्त्रिक लिपि में हैं) शब्दों की एक व्युत्पत्ति प्रकाशित की है, परन्तु उनके पाठित्यपूर्ण लेख पर यथोचित ध्यान नहीं दिया गया है।

हाल के अन्वेषणों ने तो उन सभी मिथ्यात्वों को पूर्णतया निरर्थक सिद्ध कर दिया है जो भारतीय लिपि को विदेशी लिपि पर आधारित मानते थे। महा-पापाण युग (६०० ई० पू०-३००० ई० पू०) और नवपापाण युग (१५०० ई० पू० के लगभग) के मिट्टी के बर्तन, जो मद्रास के अजायबघर में सुरक्षित हैं,

^१ यहाँ पर 'एक' का अर्थ पाँसे पर छपे हुए 'एक' से है।

^२ अजैष त्वा सलिखितमर्जयमुत सण्धम् ।

^३ ३ २ २१ ।

^४ देखिए बूलर, पूर्वोक्त ग्रंथ, प ३ ।

लेखन में अंकित है। भंडारकर^१ के अनुसार इनमें पाँच चिह्न ऐसे हैं जो अशोक-कालीन ब्राह्मी लिपि के चिह्नों के सदृश हैं। मोहेनजो-दड़ो और हड़प्पा की खुदाई के फलस्वरूप ऐसे लेख और मुहरों प्रकाश में आयी हैं जो लगभग ३००० ई० पू० की हैं। अतएव अब ब्राह्मी लिपि को आठवीं या नवीं शताब्दी ई० पू० की किसी मेमिटिक लिपि से व्युत्पन्न मानना असंगत होगा।

प्राचीनतम अक

मोहेनजो-दड़ो में प्राप्त मुहरों और लेखों के अक-सूचक चिह्न अभी तक पूर्ण रूप में नहीं पढ़े जा सके हैं, परन्तु उनमें कहीं-कहीं एक खड़ी पाई, पास-पास रखी हुई कई खड़ी पाइयाँ, और एक के ऊपर एक करके रखी हुई कई खड़ी पाइयाँ मिली हैं। मालूम होता है कि १ से लेकर १३ तक के अक इन्हीं खड़ी पाइयों से सूचित किये गये हैं, कदाचित् उसी प्रकार जैसे नीचे के चित्र में दिखाया गया है।^२



यह विलकुल निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता कि २०, ३०, सैकड़ और अधिक बड़ी सख्याओं को लिखने के लिए भी उस समय सकेत थे अथवा नहीं। यद्यपि अनेक ऐसे चिह्न मिलते हैं जिनके विषय में लोगों का विश्वास है कि वे ऐसी ही (बड़ी) सख्याओं को सूचित करते हैं, परन्तु इस समय ऐसा उपाय ज्ञात नहीं है जिससे कि उन चिह्नों के यथार्थ मान का पता चल सके।

^१ पूर्वोक्त ग्रंथ।

^२ मार्शल, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ ४५०-४२। जी० आर० हटर-कृत “मोहेनजो-दड़ो—इंडस एपिग्राफी”, (जर्नल ऑफ़ एशियाटिक सोसाइटी, अप्रैल, १९३२, पृ ४७०, ४७८ और आगे) भी देखिए। हटर महोदय ने कुछ सकेतों के सरयात्मक मान के संबंध में निश्चयपूर्वक लिखा है।

मोहेनजो-दड़ो में प्राप्त सामग्री तथा अशोक के अकर्मभित अन्तर्लेखों के बीच २७०० वर्षों या उससे अधिक समय का व्यवधान है। इस व्यवधान के काल में अब तक कोई ऐसा लिखित प्रलेख नहीं मिला जिसमें अक-चिह्नों का प्रयोग किया गया हो। तो भी साहित्यिक प्रमाणों से विदित होता है कि अत्यन्त प्राचीन काल में अक-मकेतो का प्रयोग होता था। ऋग्वेद में अक ८ का उल्लेख तथा यजुर्वेद सहित में १०^१ तक की मर्यादों को सूचित करनेवाली मन्त्राओं का प्रयोग, जिनका उल्लेख ऊपर किया जा चुका है, यह सिद्ध करने के पर्याप्त साधन हैं कि उतने प्राचीन काल में भी हिन्दू लोगों के पास भली-भाँति विकसित अक-मकेत रहे होंगे। इस निष्कर्ष को इस बात से और भी बल मिलता है कि ग्रीस और रोमवासी की अकमन्त्राण, उन देशों में लेखन तथा सतोपजनक अक-मकेत के सैकड़ों वर्षों तक प्रयोग में आ जाने के बाद भी, १०^४ के आगे नहीं बढ़ सकी।

अशोक के अन्तर्लेखों से विदित होता है कि उनके समय में अक मकेत सामान्य-रूप में भारतवर्ष में खूब प्रचलित थे।^१ विभिन्न अन्तर्लेखों के अक चिह्नों में पाया जानेवाला अंतर इस बात की ओर संकेत करता है कि वे चिह्न बहुत पहले में प्रचलित थे।

अशोक के तथा अगले काल के अधिकांश अन्तर्लेख ब्राह्मी लिपि में हैं, शेष खरोष्ठी लिपि में हैं। इन दो लिपियों के अक सूचक चिह्नों में विभिन्नता है। अतएव इन पर अलग-अलग विचार किया जायगा।

६ खरोष्ठी के अक

प्रारम्भिक उपलब्धि

खरोष्ठी लिपि दाहिनी ओर से बायी ओर को लिखी जाती थी। इस लिपि के अधिकांश अन्तर्लेख प्राचीन गान्धार (आधुनिक पूर्वी अफगानिस्तान और उत्तरी पंजाब) में मिले हैं। यह लिपि मुनीमो और व्यवसायियों के मतलब

^१ मेगस्थनीज ने उन मील के पत्थरों की चर्चा की है जो सड़क पर लगे हुए थे और दूरियों की तथा निवेश-स्थानों की सूचना देते थे। ये दूरियाँ अवश्य ही अक-सूचक चिह्नों से लिखी रही होंगी (बूलर, पूर्वांक ग्रन्थ, पृ. ६, इटिका आव. मेगस्थनीज, पृ. १२५-२६)। कौटिल्य के अर्थशास्त्र में वर्णित हिसाब रखने की जटिल रीति से भी इस निष्कर्ष की पुष्टि होती है।

की थी और सुप्रसिद्ध थी। भारतवर्ष में इसका प्रचार चौथी शताब्दी ई० पू० में लेकर तीसरी शताब्दी ईसवी तक रहा है। अशोक के समय के खरोष्ठी लिपि के अन्तर्लेखों में केवल चार अक-सूचक चिह्न मिले हैं। ये प्राचीन काल के चार ऊर्ध्वधर चिह्न हैं जो एक, दो, तीन और चार अकों को निम्न प्रकार से सूचित करते हैं

१	२	४	५
/	//	///	////

इन अकों के अधिक विकसित स्वरूप शक, पार्थियन और कुपान राजाओं के पहली शताब्दी ई० पू० तथा पहली और दूसरी शताब्दियों के अन्तर्लेखों में, और कदाचित् बाद के अन्य प्रलेखों में भी मिलते हैं। इस काल के कुछ अक निम्न प्रकार के हैं

१	२	३	४	५	६	७	८
/	//	///	X	IX	IIIX	IIIX	XX
१०	२०	४०	५०	६०	७०	८०	
७	३	३३	२३३	३३३	२३३३	३३३३	
१००	२००	३००	१२२		२७४		
८	१॥	१॥॥	॥३१		X१२३३१॥		

आकार और उत्पत्ति

यह ठीक-ठीक नहीं कहा जा सकता कि चार का अक, जो पहले चार ऊर्ध्वधर रेखाओं से व्यंजित किया जाता था, बाद में क्रॉस (X) से क्यों सूचित किया जाने लगा। ५ से लेकर ८ तक के अकों को सूचित करने में 'मकालन-सिद्धान्त' का प्रयोग किया गया है, जिसका आधार ४ है। ४ से ८

^१ अर्थात् जोड़ने का सिद्धान्त।

त्तक के अको के लिखने की यह रीति सेमाइट लोगो के प्रारम्भिक अभिलेखों में नहीं मिलती। ९ का अक किस प्रकार लिखा जाता था, हमें कोई जानकारी नहीं।

बहुत सम्भव है कि वह X X , अर्थात् $४+४+१$ (लिपि के क्रम के अनुसार दाहिनी ओर से बायी ओर पढ़ने पर), में सूचित किया जाता हो। १० के लिए एक नया ही चिह्न है। निश्चित रूप में नहीं कहा जा सकता कि १० को

||XX में क्यों नहीं सूचित करते थे, अथवा उसे लिखने में X (४) के आधार का परित्याग क्यों किया गया।

यह सभी स्वीकार करते हैं कि खरोष्ठी विदेशी लिपि है, जो पश्चिम में भारतवर्ष में लायी गयी थी। परन्तु उसे भारतवर्ष में लाये जाने का ठीक समय ज्ञात नहीं है। संभव है कि (५०० ई० पू० के लगभग) जिस समय डेरिएम ने पञ्जाब पर विजय प्राप्त की थी उस समय अथवा और पहले लायी गयी हो।^१ ऊपर दिये हुए अक निश्चयतः इसी लिपि के हैं, क्योंकि उनका क्रम दाहिनी ओर से बायी ओर को है।

ऐसा मालूम होता है कि अशोक के अन्तर्लेखों में मिलनेवाले (खरोष्ठी लिपि के) प्राचीन चिह्नों में, विशेषकर उनमें जो ४ से लेकर ९ तक अको को सूचित करते हैं, आगे चल कर कुछ सुधार किये गये थे। यह भी प्रतीत होता है कि ४ और १० के चिह्न भारतवर्ष में ही बनाये गये, इस दृष्टि से कि अक लेखन में सरलता हो और इसलिए भी कि वे अत्यन्त प्रचलित ब्राह्मी अको के समकक्ष हो जायें।

मालूम होता है कि चिह्न X , ब्राह्मी के X को, जो अशोक के अन्तर्लेखों में ४ का मन्त्रक है, घुमाकर बनाया गया है। घूमे हुए कास (X) का ४ के अर्थ में प्रयोग नेबेटियन अको में भी मिलता है, जो ईसवी मन् की प्रारम्भिक शताब्दियों में

^१ खरोष्ठी लिपि के विदेशी होने के सिद्धान्त पर मोहेनजो-दड़ो और हड़प्पा की खोजों के प्रकाश में पुनर्विचार करना पड़ेगा, विशेषकर इस तथ्य के आधार पर कि मोहेनजो-दड़ो की वर्णमाला का क्रम दाहिनी ओर से बायी ओर को था।

प्रचलित थे।^१ २० के आधार का प्रयोग करने में तथा सैकड़ों की बनावट में भी नेवेटियन अक खरोष्ठी के अकों में मिलते हैं। सम्भव है कि सेमाइट लोगो ने ४ को सूचित करनेवाले चिह्न को खरोष्ठी से नकल कर लिया हो, यद्यपि यह भी असंभव नहीं है, जैसा बूलर का विचार है, कि उक्त चिह्न का आविष्कार दोनों राष्ट्रों ने स्वतंत्र रूप से किया हो।

खरोष्ठी का दशसूचक चिह्न १ ब्राह्मी के 'अ' अक्षर से पूर्णतया मिलता है। बीस को सूचित करनेवाला चिह्न ३ दश के दो चिह्नों को एक में मिला

कर लिखने से बना है। यह पपायरम ब्लैक्स^२ (पाँचवीं शताब्दी ई० पू०) के एक फिनिशियन चिह्न से मिलता है। ३०, ४०, आदि अकों को १० और २० के महायता में व्यंजित करने का मिद्धान्त ठीक वैसा ही है जैसा कि प्राचीन फिनिशियन और आरमीनियन लोगो में मिलता है।

१०० के चिह्न का आकार ठीक वैसा ही है जैसा ब्राह्मी के 'त' या 'त्र' अक्षर के दाहिनी ओर एक खड़ी पाई लगाने से बनेगा।

२००, ३०० इत्यादि के चिह्न, १०० के चिह्न के दाहिनी ओर क्रमशः २, ३ इत्यादि के चिह्न लिखने से बने हैं। स्पष्ट है कि ऐसा करने में गुणन-मिद्धान्त का प्रयोग किया गया है, जैसा कि प्राचीन फिनिशियन लोगो में भी मिलता है।^३

अन्य मख्याओं की बनावट २७४ की बनावट को देखने से समझ में आ जायगी। यह अक २, १००, २०, २०, २०, १० और ४ के चिह्नों को, दाहिनी ओर से बायीं ओर, निम्न प्रकार से लिखने पर बनता है

X/२३३३५॥

^१ जे ऑयर्टिंग, नवाटेंशे इथ्रिपटेन आउस अराविअन, वर्लिन, १८८५, पृ० ६६-६७।

^२ बूलर, पैलिओग्रैफी, पृ० ७७, ओस्ता, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० १२८, आगे देखिए सारिणी २ (ब)।

^३ आगे देखिए, सारिणी २ (स)।

२, जो १०० के दाहिनी ओर लिखा है, १०० को गुणा करता है, बाकी अक जो १०० के बायी ओर लिखे हैं उम गुणनफल में जुड़ जाते हैं, इस प्रकार २७४ की प्राप्ति होती है।

खरोष्ठी लिपि के प्राचीन अक मारिणी १ में दिये हैं।

७ ब्राह्मी के अक

प्रारम्भिक उपलब्धि और आकार

ब्राह्मी लिपि में लिखे हुए अन्तर्लेख समस्त भारतवर्ष में फैले हुए मिलते हैं। इससे यह विदित होता है कि ब्राह्मी लिपि प्राचीन हिन्दुओं की राष्ट्रीय लिपि थी। निस्सन्देह यह ब्राह्मणों का आविष्कार है। मालूम होता है कि व्याकरण एवं ध्वनि-सवयी प्राचीन अनुसन्धानों के परिणाम-स्वरूप इस लिपि की सिद्धि १००० ई० पू० अथवा इसके कुछ पहले हुई। अतएव ब्राह्मी अक पूर्णतया भारतीय आविष्कार है। कई प्रख्यात लेखकों ने इन अकों की विदेशी उत्पत्ति सिद्ध करने के सिद्धान्त उपस्थित करने के प्रयत्न किये हैं, परन्तु हमें पूर्ण विश्वास है कि उनके सभी प्रयत्न असफल रहे हैं।^१ इन सिद्धान्तों पर आगे यथा-स्थान विचार किया जायगा। प्राचीन प्रलेखों के अभाव के कारण हम निश्चित रूप से नहीं कह सकते कि ब्राह्मी अकों के मूल आकार क्या थे। इन अकों के विषय में हमारा ज्ञान पीछे की ओर महाराज अशोक (लगभग ३०० ई० पू०) के समय तक जाता है, जिनके विशाल साम्राज्य में सम्पूर्ण भारतवर्ष सम्मिलित था और जो उत्तर में मध्य एशिया तक फैला था। अशोक के अन्तर्लेखों में मिलनेवाले अक निम्न आकार के हैं

४

६

५०

२००

+

६,६

६,७

५, ५, ६

दूसरा महत्वपूर्ण अन्तर्लेख, जिसमें अकों का प्रयोग हुआ है, पूना से लगभग ७५ मील की दूरी पर नानाघाट नामक पहाड़ी की चोटी पर स्थित एक गुफा में

^१ मोहेनजो-दड़ो ऐण्ड दि डडम मिथिलाइजेशन, अध्याय २३, में लंगटन का मत देखिए।

मिला है। यह गुफा महाराज शानवाहन के वंशज महाराज वेदिथ्री की आज्ञा से यात्रियों के ठहरने के लिए बनायी गयी थी। इस अन्तर्लेख में यज्ञो के अवसरो पर दिये हुए दान की सूची मिलती है। इसे पहले-पहल पंडित भगवानलाल इन्द्र जी ने पढ़ा था और इसके अक-चिह्नों का अर्थ लगाया था।^१ ये अक प्राय ३० स्थानों पर आये हैं, और उनके आकार निम्न प्रकार के हैं

१	२	४	६	७	८	१०
-	=	≡	Υ	γ	7	α, α, α
२०	२०	१००	२००	३००	४००	७००
०	०	π	π	π	π	π
१,०००	४,०००	६,०००	१०,०००	२०,०००		

π π π π π

पहली और दूसरी शताब्दी के कई अन्तर्लेख जिनमें अको का प्रयोग हुआ है बम्बई प्रेसीडेन्सी के नासिक जिले में स्थित एक गुफा में मिले हैं। इनमें अको की अधिक पूर्ण सूची मिलती है। उनके आकार^२ निम्नलिखित हैं

१	२	३	४	५	६	७	८
-	=	≡	π, π	π	π	γ	γ, γ
८	१०	२०	४०	७०	१००	२००	५००
α α	ε	ς	ς	ς	ς	ς	π
१,०००	२,०००	३,०००	४,०००	५,०००	६,०००	७,०००	

ς ς ς ς ς ς

^१ "ऑन ऐंशेण्ट नागरी न्यूमरेशन फ्राम ऐन इस्क्रिप्शन ऐट नानाघाट", जर्नल ऑव दि वाग्ने ब्राच ऑव दि रॉयल एशियाटिक सोसायटी, १८७६, जिल्द १२, पृ० ४०४।
^२ ई० सेनार्ट, "दि इस्क्रिप्शन इन दि केवज ऐट नासिक," एपिग्रेफिया इंडिका, जिल्द ८, पृ० ५६-६६, "दि इस्क्रिप्शन इन दि केव ऐट कालें", एपिग्रेफिया इंडिका, जिल्द ७, पृ० ४७-७४।

शून्य एव स्थान-मान सिद्धान्त के आविष्कार के बाद भी १ से लेकर ९ तक अंकों के उन्हीं (प्राचीन) चिह्नों का, शून्य के साथ, प्रयोग होता रहा। अतएव इन चिह्नों का क्रमिक विकास सहज ही मालूम किया जा सकता है। यह क्रमिक परिवर्तन, जो स्थान-मान-सिद्धान्त रहित प्राचीन प्रणाली में लेकर शून्य और स्थान-मान-सिद्धान्त-युक्त नवीन प्रणाली तक हुआ, केवल भारतवर्ष में ही देखने में आता है। ममार के अन्य राष्ट्रों ने अपने देश के अक-मकेतों को, जिन्हें वे स्थान-मान सिद्धान्त की सहायता के बिना ही प्रयोग करते थे, त्याग दिया और उनके साथ ही शून्य तथा नवीन अंक चिह्नों को ग्रहण किया, जो कि उनके देश में पहले कभी प्रयुक्त नहीं हुए थे। केवल यही तथ्य शून्य एव स्थान-मान सिद्धान्त की भारतीय उत्पत्ति का ज्वलंत प्रमाण है।

ब्राह्मी लिपि की १, २ और ३ मध्याएँ, एक के नीचे एक करके रखा हुई क्रमानुसार एक, दो, और तीन वेड़ी (क्षि ज) रेखाओं में सूचित की जाती थी। इन आकारों में ही ब्राह्मी मकेत का खरोष्ठी और सेमिटिक मकेतों में अन्तर स्पष्ट हो जाता है।

यह कहना कि ब्राह्मी लिपि की रेखाएँ वेड़ी तथा खरोष्ठी और सेमिटिक की पड़ी (ऊर्ध्वधर) क्यों हैं उतना ही कठिन है जितना कि यह बताना कि ब्राह्मी लिपि में लिखने का क्रम बायीं ओर से दाहिनी ओर क्यों है जबकि खरोष्ठी और सेमिटिक लिपियों में लिखने का क्रम दाहिनी ओर से बायीं ओर को है। हमारा विचार है कि ब्राह्मी और खरोष्ठी (सेमिटिक) अंकों का सदा से साथ-साथ अस्तित्व रहा है। दोनों लिपियों में १ से ३ तक के अक-मकेतों का अन्तर कदाचित् उन लिपियों के मौलिक अन्तर के कारण है। दोनों लिपियों में अंक-चिह्नों की रचना का सिद्धान्त स्पष्टतया भिन्न है।

अन्य सकेतों से अन्तर

ब्राह्मी लिपि में १, ४ से ० और १०, २०, ३०, ४०, ५०, ६०, ७०, ८०, ९०, १००, २००, ३००, , १०००, २००० इत्यादि प्रत्येक सस्या के

१ स्मिथ और कार्पिस्की का यह कथन अशुद्ध है कि नानाघाट वाले आकार ऊर्ध्वधर हैं। देखिए, हिन्दू अरेबिक न्यूमरल्स, पृ० २८।

लिए अलग-अलग सकेत हैं, जबकि प्राचीनतम खरोष्ठी और प्राचीनतम सेमिटिक लिपियों में तथा हिएरोग्लिफिक^१ और फिनिशियन लिपियों में केवल १, १०, २० और १०० को सूचित करनेवाले ही सकेत हैं।

तो भी हिऐरेटिक और डेमोटिक^२ अक ब्राह्मी से इस बात में मिलते हैं कि इन तीनों में १ से १०० तक की सख्याओं के लिए केवल १९ सकेतों का प्रयोग किया गया है, परन्तु, जैसा सारिणी २ (स) से विदित होगा, २००, ३००, ४००, २०००, ३००० और ४००० को सूचित करनेवाले सकेतों की रचना-पद्धति में अन्तर है। जबकि ब्राह्मी में बड़े अक वायी ओर को लिखे जाते हैं, खरोष्ठी और सेमिटिक में वे, इसके विपरीत, दाहिनी ओर को लिखे जाते हैं। इस प्रकार २७४ को ब्राह्मी में, २००, ७० और ४ के चिह्नों की सहायता से, (२००) (७०) (४) द्वारा सूचित करेंगे, जबकि खरोष्ठी और सेमिटिक में (४) (७०) (२००) के द्वारा।^३

उनकी उत्पत्ति से सम्बन्ध रखनेवाले सिद्धान्त

ब्राह्मी अकों की उत्पत्ति समझाने के लिए बहुत से सिद्धान्त उपस्थित किये जा चुके हैं। इन सिद्धान्तों में ब्राह्मी अकों और अन्य राष्ट्रों के अकों के बीच सादृश्य की कल्पना की गयी है। अपने-अपने सिद्धान्तों की पुष्टि के लिए लेखकों ने अन्य राष्ट्रों के अकों में घुमाव फिराव, जोड़-जाड़, और काट छाँट भी की है। कहने की आवश्यकता नहीं कि इन सिद्धान्तों में प्रत्येक के समर्थक भी थे जो उनकी मत्यता में पूर्ण विश्वास रखते थे। नीचे हम इन सिद्धान्तों में से कुछ की रूप-रेखा दे रहे हैं

(१) कनिंघम^४ महोदय का विश्वास था कि भारतवर्ष के रहनेवाले प्राचीनतम ज्ञात बाल से लिखना जानते थे, तथा उनकी प्राचीन वर्णमाला चित्रात्मक थी। उनकी धारणा थी कि ब्राह्मी लिपि कदाचित् प्रारम्भिक चित्रात्मक लेखन से निकली

^१ मिस्र देश की एक प्राचीन लिपि।

^२ मिस्र देश की प्राचीन दो लिपियाँ।

^३ खरोष्ठी में लिखे उसी अक से तुलना कीजिए। देखिए पृ० २१।

^४ अशोक के शिलालेख, कॉर्पस इन्स्ट्रिप्तिओनम इटिकेरम, जिल्द १, पृ० ५२।

है। यह सिद्धान्त स्पष्टतः अक-मकेतो पर भी लागू किया जा सकता है। तो भी वाद के पुरालेख-विदो ने इस सिद्धान्त का तिरस्कार कर दिया, इस आधार पर कि यह उन्हें अत्यधिक कपोल-कल्पित मालूम होता था। कनिंघम की, भारतवर्ष में लेखन की प्राचीनता में सबंध रखनेवाली, उपर्युक्त माहमपूर्ण कल्पना को ४००० ई० पू० की उस चित्रवत लिपि न यथार्थ सिद्ध कर दिया है जो मोहेनजो-दड़ो और हड़प्पा में खुदाई से प्राप्त कुछ मुहरों और लेखों में मिली है। कनिंघम के सिद्धान्त को लैंगडन महोदय ने पुनर्जीवित किया है। लैंगडन के मत में ब्राह्मी लिपि का मोहेनजो-दड़ो की चित्रात्मक लिपि से उत्पन्न होना सम्भव है।^१ परन्तु चूंकि मोहेनजो-दड़ो के लेख अभी तक पूर्ण रूप से पढ़े नहीं गये हैं, इसलिए लैंगडन का सिद्धान्त अभी अधूरा ही है। अभी इसे अनुमान-मात्र ही कहा जा सकता है। ब्राह्मी अक-मकेतो के विकास के सबंध में यह कहा जा सकता है कि वर्तमान समय में मोहेनजो-दड़ो की लिपि से अक-मकेतो का अलग करना ही एक टेढ़ी समस्या है। यदि यह कल्पना कि पृष्ठ १७ पर दिये हुए आकार अक-मकेत है मत्त भी हो, तो भी यह सिद्धान्त प्रतिपादित करना सम्भव न होगा कि ब्राह्मी अको की उत्पत्ति उन्हीं अको में हुई है।

(२) वेली^२ महोदय के कथनानुसार ब्राह्मी लिपि के मुख्य सिद्धान्त मिस्र देश के हिऐरोग्लिफिक मकेत के आधार पर बने हैं, और अधिकांश भारतीय आकार फिनिशियन, दैक्ट्रियन तथा अक्केडियन स्वरूपों या अक्षरों की नकल हैं। जैसा पहले बताया जा चुका है^३, ब्राह्मी और हिऐरोग्लिफिक के सिद्धान्तों में नितान्त विषमता है—कोई मेल नहीं। हिऐरोग्लिफिक और ब्राह्मी के अक, सारिणी २ (अ), २ (ब) और २ (म) में साथ-साथ दिये गये हैं, पाठक उन्हें देखकर वेली महोदय के कथन की अमत्यता का स्वयं अनुभव कर सकते हैं। पुनश्च, इस कल्पना पर विश्वास करना कि हिन्दुओं ने अपने अक-मकेतो को चार-पाँच, कुछ अत्यंत प्राचीन और कुछ

^१ मोहेनजो-दड़ो इत्यादि, अध्याय १२। हटर (पूर्वोक्त, पृ० ४६०) ने इस मत का जोरदार समर्थन किया है।

^२ जर्नेल ऑव दि रॉयल एशियाटिक सोसायटी, जिल्द १५, भाग १, पुनर्मुद्रण, लंदन, १८८२, पृ० १२ और १७। इस सिद्धान्त का टेलर ने समर्थन किया था। देखिए, दि ऐन्फावेट, लंदन, १८८३, जिल्द २, पृ० २६५-६६।

^३ देखिए पृष्ठ २४-२५।

अपेक्षाकृत अधिक नवीन, सूत्रों से लिया है अत्यंत कठिन है। ब्रैक्ट्रियन और अक्केडियन अको और ब्राह्मी आकारों के सादृश्य के सबब में, जिसकी वेली महोदय ने कल्पना की है, बूलर महोदय का कथन है कि चार अवस्थाओं में (अर्थात् ४, ६, ७ और १० अको के आकारों में) वास्तविकता वेली महोदय की कल्पना के नितान्त विरुद्ध है। कुछ लेखकों ने वेली महोदय द्वारा दिये हुए आकारों में, उनके सिद्धान्त में प्रभावित होने का भी दोष लगाया है।^१ इन सब कारणों से वेली महोदय का सिद्धान्त त्याज्य है।

(३) वर्नेल महोदय के मतानुसार भारतीय पद्धति के सिद्धान्तों और मिस्र देश के डेमोटिक मकेत के सिद्धान्तों में सामान्य रूप से सादृश्य है। इन्होंने १ से लेकर ९ तक अको के डेमोटिक चिह्नों तथा उन्हीं अको के भारतीय चिह्नों के सादृश्य का कथन किया है, और यह सिद्धान्त उपस्थित किया है कि हिन्दू लोगों ने इन अको को डेमोटिक लिपि से लिया और बाद में उनका सुधार करके उन्हें अक्षरों में परिवर्तन कर लिया।

(४) बूलर महोदय ने वर्नेल के सिद्धान्त का एक परिष्कृत रूप उपस्थित किया है। वे लिखते हैं, “मुझे यह सम्भव प्रतीत होता है कि ब्राह्मी अक मिस्र देश के हिऐरेटिक आकारों के आधार पर बनाय गये हैं, और यह कि हिन्दू लोगों ने उन्हें अधरो में रूपान्तरित कर लिया, क्योंकि वे पहले से ही अको को शब्दों द्वारा सूचित करने में अभ्यस्त थे।”

वर्नेल और बूलर के सिद्धान्त भी वेजी के सिद्धान्त की भाँति माधु-मूलक नहीं हैं। सारिणी २(अ), २(ब), २(म) में ब्राह्मी के साथ-साथ हिऐरेटिक और डेमोटिक मकेत दिये हुए हैं। इन सारिणियों की परीक्षा करने पर विदित होगा कि १ में लेकर १०० तक के अको को सूचित करनेवाले १९ सकेतों में से, ब्राह्मी के केवल ९ मकेत डेमोटिक अथवा हिऐरेटिक के संगत सकेतों के अनुरूप हैं। अन्य सकेतों के बीच किसी प्रकार का सादृश्य नहीं है। हिऐरेटिक मकेत के ५ एवं ब्राह्मी के ७ के बीच होने वाले रूप-सादृश्य पर व्युत्पत्ति

^१ बूलर, ऑन दि आरिजिन ऑव दि इंडियन ऐन्फाबेट, स्ट्रासबुर्ग, १८६८, पृ० ५२, ५३ फुटनोट।

^२ देखिए स्मिथ और कार्पिन्की, हिन्दू-अरेबिक न्यूमरत्स, पृ० ३०-१।

^३ बूलर, पूर्वोक्त पृ० ८२।

का आधार स्थापित करना नितान्त अनर्गल है। इसी प्रकार अपने मिथ्यान्त की पुष्टि के लिए डेमोटिक एव हिएरेटिक आकाशों का घुमाव-फिराव भी ग्राह्य नहीं है।

इन पद्धतियों में एक समानता अवश्य है कि प्रत्येक में १ से लेकर १०० तक के अंकों को सूचित करने के निमित्त केवल १९ चिह्न ही प्रयुक्त किये गये हैं, और इसे कोई अस्वीकार नहीं कर सकता। परन्तु संकडों (१००, २०० इत्यादि) और हजारों (१०००, २०००, इत्यादि) को सूचित करनेवाले चिह्नों की बनावट में भिन्नता है। बाह्यी में २०० और ३०० को सूचित करनेवाले संकेत बनाने के लिए १०० के संकेत के दाहिनी ओर क्रम से १ और २ मात्राएँ लगा देते हैं, इसी प्रकार २००० और ३००० को सूचित करनेवाले संकेत बनाने के लिए १००० के संकेत के दाहिनी ओर क्रम से १ और २ मात्राएँ लगा देते हैं जो कि नीचे के चित्र में स्पष्ट है

$$\gamma = 100, \quad \gamma = 200, \quad \gamma = 300$$

$$9 = 1,000, \quad 9 = 2,000, \quad 9 = 3,000$$

४०० और ४००० को सूचित करनेवाले संकेत, १०० और १००० को सूचित करनेवाले संकेतों के दाहिनी ओर \times (४) जोड़ कर बनाये जाते हैं,

जैसा कि नीचे के चित्र में है --

$$\gamma \times = 400 \text{ और } 9 \times = 4,000$$

हिएरेटिक पद्धति के सगुप्त संकेत ये हैं

$$4 = 2$$

$$5 = 3$$

$$6 = 4,$$

$$7 = 100,$$

$$8 = 1,000,$$

$$9 = 200,$$

$$9 = 2,000,$$

$$10 = 300,$$

$$11 = 3,000,$$

$$12 = 400,$$

$$13 = 4,000$$

पाठक देखेंगे कि हिऐरेटिक पद्धति में १००० सूचक सकेत अन्य सहस्र-सूचक सकेतो के बनाने में प्रयुक्त नहीं किया गया है। यदि सिद्धान्त-सादृश्यपूर्ण रूप से भी होता, तो भी हम यह मानने को बाध्य न होते कि एक राष्ट्र ने दूसरे का अनुकरण किया है। १९ सकेतो का प्रयोग कदाचित् अको को व्यंजित करने की सरल एवं सर्वोत्कृष्ट रीति थी, और सम्भव है कि जो बात मिस्रवालों को सरल प्रतीत हुई हो वही स्वतंत्र रूप से भारतवासियों को भी वैसी ही प्रतीत हुई हो।

इसके विपरीत कुछ कारण ऐसे हैं जिनसे मालूम होता है कि मिस्रवालों ने हिऐरेटिक एवं डेमोटिक पद्धतियों को अन्य देशों, कदाचित् भारतवर्ष, से प्राप्त किया था। यह विचार असंगत नहीं है, क्योंकि यह संभव है कि १९ सकेतो के आधार पर आश्रित भारतीय अक-सिद्धान्त का अविष्कार १००० ई० पू० के लगभग हुआ हो। यह बात तो ज्ञात ही है कि मिस्र की प्राचीन अकमाला में केवल चार सकेत हैं, जो १, १०, २० और १०० अको को सूचित करते हैं। इस प्राचीन प्रणाली में एक आकस्मिक परिवर्तन करके १९ सकेतोवाली दूसरी प्रणाली ग्रहण करने का कारण उचित रीति से तब तक नहीं समझाया जा सकता जब तक विदेशी प्रभाव की कल्पना पहले ही से न कर ली जाय। पुनश्च २, ३ और ४ को सूचित करनेवाले, घसीट में लिखे हुए, आकार दाहिनी ओर से बायी ओर को लिखी जानेवाली हिऐरेटिक एवं डेमोटिक लिपियों के अनुकूल नहीं है। यद्यपि इन आकारों का प्राचीन हिऐरोलिफिक और फिनिशियन आकारों से संबंध है, तो भी यह सम्भव है कि इन आकारों का प्रयोग, नवीन प्रणाली के १९ सकेतो की आवश्यकता के निवारणार्थ, ऐसे लोगों के प्रभाव के कारण हुआ जिनकी लिपि बायी ओर से दाहिनी ओर को हो। तो भी यह कह देना उचित होगा कि हिऐरेटिक प्रणाली की भारतीय उत्पत्ति की कल्पना केवल एक सुझाव है। उपर्युक्त दो बातें, जब तक उनकी अन्य प्रमाणों से पुष्टि न हो जाय, एक नवीन सिद्धान्त उपस्थित करने के लिए स्वयं पर्याप्त नहीं हैं। आशा की जाती है कि आगे होनेवाले अनुसंधान इस विषय पर प्रकाश डालेंगे।

अक्षर सकेत से सम्बन्ध

१८३८ ई० में जेम्स प्रिंसेप महोदय^१ ने यह सुझाव दिया था कि अक-सकेत,

^१ 'एक्जामिनेशन ऑव इस्क्रिप्ट्स फ्रॉम गिरनार इन गुजरात, एण्ड धौली इन एटव', जर्नल ऑव दि एशियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल, १८३८।

अक-मज्ञाओं के प्रारम्भिक अक्षरो के आधार पर बने हैं। परन्तु अक-मज्ञाओं के उच्चारण जान लेने पर, हम देखते हैं कि ऐसी बात नहीं है। अन्य अन्वेषको का मत है कि अक-मकेतो की बनावट, प्राचीन वर्णमाला के क्रम के अनुसार लिखे हुए अक्षरो पर आधारित है। यद्यपि अको को व्यजित करने के लिए अक्षरो का प्रयोग आठवीं शताब्दी ई० पू० पहले तक हुआ है,^१ एव अक्षर-मकेत की अन्य पद्धतियाँ बाद में आविष्कृत हुई^२ और सामान्य रूप से प्रयोग में आयी, तो भी हम उक्त कल्पना का त्याग करने पर विवश हैं क्योंकि प्राचीन अक-मकेतो और वर्णमाला के अक्षरो के बीच किसी प्रकार का सादृश्य नहीं दिखाया जा सकता।

कुछ प्राचीन हस्तलिपियों के पत्राकन में, और कुछ सिक्कों तथा कुछ अन्तर्लेखों में एक विलक्षण अक-मकेत का प्रयोग मिलता है, जिसमें स्पष्टतः वर्णमाला के स्वरो और व्यजनों का प्रयोग किया गया है। तो भी प्रयुक्त चिह्न मदैव एक तरह के नहीं हैं, बहुधा उनमें कुछ अन्तर मिलता है, जो कदाचित् अक-मकेत और अक्षर-मकेत की विषमता सूचित करने के लिए किया गया है। इसमें कोई सन्देह नहीं कि ये चिह्न अक्षरो से बने हैं, क्योंकि जैनियों ने इस पद्धति को, दशमलव मकेत (अकपल्ली) में पृथक् करने के लिए, अक्षर-पल्ली की मजा दी है।^३

अक्षर पल्ली के प्रयोग से इस बात का सुझाव मिलता है कि कदाचित् प्राचीन ब्राह्मी अक-मकेत भी ब्राह्मी वर्णमाला के स्वरो एव व्यजनों के आधार पर बने हों।

अको और अक्षर-स्वरूपों की विस्तृत समीक्षा का निष्कर्ष निम्नलिखित है^४

अक, १, २, और ३ जो पहले बड़ी रेखाओं से सूचित किये जाते थे, किसी भी अक्षर में सादृश्य नहीं रखते। कदाचित् वे मात्राओं के आधार पर बनाये गये हैं।

४—इस अक का प्राचीनतम आकार, जो अशोक के अन्तर्लेखों में मिलता है, 'क' अक्षर के सदृश है। नानाघाट और नासिक की गुफाओं में मिलनेवाला

^१ ऐसा प्रयोग कदाचित् पाणिनि ने भी किया है। देखिए पृ० ५८।

^२ आगे पृ० ५९ इत्यादि, देखिए।

^३ बृलर, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ७८। अक्षरपल्ली का विस्तृत वर्णन आगे किया गया है, देखिए पृ० ६७ इत्यादि।

^४ अको के विभिन्न आकारों के लिए, देखिए सारिणी ३ से लेकर सारिणी १३ तक।

आकार 'क्' के सदृश है। 'ज', 'ल', 'ट' और 'प्' अक्षरो से मिलते हुए आकार भी पाये जाते हैं, परन्तु ऐसे आकार अधिकांश में अर्वाचीन अन्तर्लेखों में ही मिलते हैं।

५ — अधिकांश अन्तर्लेखों में यह अक 'तृ' अक्षर से मिलता है। परन्तु 'त', 'ता', 'पु', 'हु', 'र', 'तृ', 'तृआ', 'ना', 'न' 'ह', 'ह' और 'ह' के सदृश आकार भी मिले हैं।

६ — अधिकांश अन्तर्लेखों में यह अक 'फ' अक्षर के सदृश है, परन्तु कुछ अन्तर्लेखों में 'फा', 'फ', 'फा', 'ज', और 'हा' के सदृश आकार भी मिले हैं। इस अक के विषय में अधिक सादृश्य नहीं है।

७ — अधिकांश अन्तर्लेखों में यह अक 'ग' अथवा 'गु' अक्षर के सदृश है, परन्तु कुछ में इसका आकार 'ग' की तरह है।

८ — यह अक अधिकतर 'ह' अथवा 'हा' अक्षर से मिलता है, परन्तु कुछ अन्तर्लेखों के आकार किसी अक्षर से नहीं मिलते।

९ — इस अक के प्राचीनतम आकार, जो नानाघाट, कुपान एव क्षत्रप अन्तर्लेखों में मिलते हैं, किसी भी अक्षर के सदृश नहीं कहे जा सकते। बाद के आकार कदाचित् 'उ' अक्षर अथवा 'ऊ' के सदृश हैं।

१० — इस अक के प्राचीनतम आकार भी किसी अक्षर से नहीं मिलते, यद्यपि बाद के आकार 'रघ', 'ह', 'ह', 'ख' और 'ठु' या 'ठ' से मिलते-जुलते कहे जा सकते हैं।^१

२० — इस अक के सभी आकार 'थ' अक्षर के सदृश हैं।

३० — इस अक के सभी आकार 'ल' अक्षर के सदृश हैं।

४० — इस अक के सभी आकार 'प्त' अथवा 'स' से मिलते हैं।

५० — इस अक के आकार अनुनासिक से मिलते हुए कहे जा सकते हैं।

६० — इस अक के आकार 'पु', 'प' और 'प्र' से मिलते हैं।

७० — इस अक के आकार 'पु', 'प्त', 'प्र', 'प्रा' अथवा 'ह' के सदृश हैं।

८० — इस अक के आकार उपध्मानीय चिह्न की तरह है।

९० — इस अक के आकार भी उपध्मानीय चिह्न की तरह हैं, परन्तु इसमें बीच में त्रास का चिह्न भी मिलता है।

^१ यह बूलर का मत है। देखिए, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ८०।

१०० — अविकाश अन्तर्लेशो मे यह अक्षर 'मु' मे मिलता है, परन्तु कुछ अन्तर्लेशो मे इसका आकार 'अ' की तरह है।

इद्रजी का मत

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि —

(१) ६ और १०, तथा १, २, और ३ अक्षरों के प्राचीन आकारों को कोई ध्वनिमान नहीं दिया जा सकता।

(२) ७ और ९ को छोड़कर, अन्य अक्षरों के आकारों की ध्वनियों में अत्यधिक अन्तर है।

(३) ७० को छोड़कर, जिसके आकारों में अत्यधिक विपमता है, अन्य दहाई-मूचक अक्षरों की ध्वनियाँ प्रायः निश्चित हैं।

इस प्रकार, १, २, और ३ अक्षरों को छोड़ देने पर, हम देखते हैं कि शेष १६ अक्षरों में से दो अक्षरों (अर्थात् ६ और १०) की अक्षरों में समता नहीं की जा सकती; तीन अक्षरों (अर्थात् ७, ९ और ७०) के ध्वनिमानों में अत्यधिक विपमता है, और शेष ११ अक्षरों के ध्वनिमान प्रायः निश्चित हैं। इन तथ्यों के आधार पर पंडित भगवानलाल इद्रजी ने यह मत उपस्थित किया है कि ब्राह्मी अक्षरमैत्रेयी की उत्पत्ति ब्राह्मी वर्णमाला के अक्षरों से हुई है, तथापि पंडितजी ने स्वीकार किया है कि वे यह जानने में असमर्थ हैं कि इस विषय में किस मिथ्या का आश्रय लिया गया है। और यह बात अब तक किसी अन्य विद्वान को भी नहीं ज्ञात हो सकी है। वस्तुतः इस समस्या का तब तक कोई हल नहीं दिखायी पड़ता, जब तक अक्षरों के पूर्व की ऐसी अन्तर्लेश-सम्बन्धी सामग्री नहीं प्राप्त होती जिसमें अक्षरों का प्रयोग हुआ हो। अशोक के समकालीन एवं परकालीन अन्तर्लेशों में प्रयुक्त आकार इतनी अधिक उन्नत अवस्था में हैं और अपने उद्भवकाल में इतने अधिक समय बाद के हैं कि वे अपनी उत्पत्ति के विषय में कोई वांछित सूचना नहीं देते।

परन्तु समय-समय पर जो मत उपस्थित किये गये हैं उन सबमें से पंडित इद्रजी का मत हम लोगों को सर्वोत्कृष्ट प्रतीत होता है। हिन्दू लोग चीनी

'इनकी 'ज', 'स', 'क्र', इत्यादि से, तथा 'ठ', 'ठ', इत्यादि से समता, जो बूलर (पूर्वोक्त पृ० ८०) ने कल्पित की है, हमको बहुत ठीक नहीं जैचती।

शताब्दी ई० पू० में लिखना जानते थे। लगभग २००० ई० पू० में वे १०^१ जैसे बड़े अको का प्रयोग करते थे, और उस समय के पश्चात् उन लोगों के धर्म और विज्ञानों ने बड़े अको के प्रयोग को आवश्यक बना दिया है। कहा जाता है कि गौतम बुद्ध ने छठी शताब्दी ई० पू० में १०^१ जैसे बड़े अको के लिए सज्ञाओं की रचना की थी, और आगे चलकर इस अक-परम्परा की पुनर्वृद्धि की गयी थी।^१ इन तथ्यों से उस अवस्था का उद्घाटन होता है जो अकगणित के अतिरिक्त विकास के बिना असम्भव है। यह तो निश्चित है कि प्राचीनतम काल में ही हिन्दुओं ने इन अको को लिखने की किसी प्रणाली की आवश्यकता अवश्य प्रतीत की होगी। अतएव यह निष्कर्ष निकालना कि हिन्दुओं ने ब्राह्मी अक-प्रणाली का आविष्कार किया, ऐतिहासिक प्रमाणों के प्रतिकूल न होगा। इस निष्कर्ष को इस बात से अनुमोदन मिलता है कि अकलेखन में मात्राओं तथा अनुनासिक एवं उपध्मानीय चिह्नों का प्रयोग हुआ है जो प्राचीन एवं अर्वाचीन लिपियों में से केवल संस्कृत लिपि में ही मिलते हैं। इसे इस बात से और भी बल मिलता है कि हिन्दू, जैन तथा बौद्ध-परम्पराएँ ब्राह्मी लिपि और अक-संकेत को सृष्टिकर्ता ब्रह्मा का आविष्कार मानती हैं, और तदनुसार इसे अत्यन्त प्राचीन राष्ट्रीय आविष्कार प्रतिपादित करती हैं।^२

आविष्कार का समय

ब्राह्मी अको के आविष्कार का समय १००० ई० पू० से लेकर ६०० ई० पू० तक निर्धारित किया जा सकता है। क्योंकि अशोक-कालीन अको से विदित होता है कि ब्राह्मी अक-प्रणाली समस्त भारत में सामान्य रूप से प्रचलित थी^३ और इसके पीछे एक बड़ा इतिहास जुड़ा हुआ है, अतएव नीचे की अवधि, १००० ई० पू०, निश्चय ही अधिक प्राचीन नहीं है। इसके विपरीत, अन्य बातें, जैसे अत्यन्त प्राचीन काल में कलाओं एवं विज्ञानों का उच्च विकास, बौद्ध

^१ देखिए पृ० १०-१२।

^२ बूलर ने अनेक प्रमाण उद्धृत किये हैं, (पूर्वोक्त। पृ० १, फुटनोट)। इनमें से नारद-स्मृति और जैन आगम ग्रंथ समवायाग-सूत्र चौथी शताब्दी ई० पू० के हैं।

^३ मेगस्थनीज ने सड़क पर लगे हुए मील के पत्थरों की चर्चा की है जो दूरियों तथा निवेश स्थानों की सूचना देते थे। देखिए इंडिका ऑफ मेगस्थनीज, पृ० १२५-१२६, बूलर, पूर्वोक्त।

साहित्य में 'अक चिह्नो की चर्चा' और बड़ी-बड़ी मख्याओं का प्रयोग, सभी निर्देश करती हैं कि ब्राह्मी अक-प्रणाली का आविष्कार यदि अधिक पहले नहीं तो १००० ई० पू० के लगभग अवश्य हुआ होगा।

सारांश

पंडितजी के मिथ्यान्त की पुष्टि इस तथ्य में है कि १९ आकारों में से ११ आकार तो निश्चित रूप से ब्राह्मी लिपि के अक्षरों अथवा चिह्नों के स्वरूप हैं। यह मादृश्य इतना विलक्षण है कि पूर्णतया आकस्मिक नहीं कहा जा सकता। पुनश्च, यह भी देखा गया है कि अक्षरों के आकारों ने उस परिवर्तन का निरन्तर अनुकरण किया है जो अक्षरों के आकारों में शताब्दी-प्रति-शताब्दी हुआ है। यह बात विशेषकर दहाइयों के लिए सत्य है और दर्शित करती है कि प्राचीन अन्तर्लेखों के लेखक इन आकारों के ध्वनिमान में अवगत थे। इकाइयों के चिह्न, अक्षरों के आकारों में कदाचित् इसलिए भिन्न हैं कि उनका आविष्कार सबसे पहले हुआ था और वे अधिक प्रचार में थे, अतएव वे घसीट में लिखे जाने लगे तथा अक्षरों के आकारों में होनेवाले परिवर्तन का उन्होंने अनुकरण नहीं किया।

अब हम इस परिच्छेद में वर्णित विषय का निम्न सारांश दे सकते हैं (१) ब्राह्मी अक निस्सन्देह भारतीय आविष्कार है, (२) दहाइयों के चिह्न वर्णमाला के अक्षरों से बनाये गये हैं, और (३) इकाइयों के चिह्नों की उत्पत्ति सन्देहास्पद है। संभव है कि वे भी वर्णमाला के अक्षरों के आकार पर बने हों, परन्तु जब तक अगोके के पहले के अक-चिह्न उपलब्ध नहीं होते तब तक इस कथन की वास्तविकता सिद्ध करने का कोई उपाय नहीं है।

८ दशमलव स्थान-मान पद्धति

महत्त्वपूर्ण लक्षण

तीसरा परन्तु सबसे महत्त्वपूर्ण, हिन्दू अक-मकेन दशमलव स्थानमान संकेत है। इस पद्धति में दस चिह्न हैं, जो एक से लेकर नौ तक

^१ ललित विस्तर में वर्णित, संस्कृत मूल तथा ३०८ ईसवी के चीनी अनुवाद दोनों में। जैन ग्रंथ समवायाग सूत्र (ल० ३०० ई० पू०) और पञ्चवना-नूत्र (लगभग १६८ ई० पू०), प्रत्येक में १८ लिपियों की एक सूची दी हुई है। देखिए वेबर, इट्टिंगे स्टुट्टिगन, १६, २८०, ३६६।

सख्याओं तथा शून्य को सूचित करते हैं और अक कहलाते हैं। स्थान-माप सिद्धान्त का प्रयोग करके सभी सख्याओं को सरलता से लिखने के लिए ये दश अक विलकुल पर्याप्त हैं। लिखने का आधार निस्सन्देह दश है। यह पद्धति अब सम्पूर्ण जगत में सामान्य रूप में प्रचलित है। शून्य और स्थान-मान सिद्धान्त के बिना, हिन्दू अक उसी प्रकार के अन्य अकों में न तो श्रेष्ठ ही होते और न ससार के सम्य लोगों में उनका आदर ही होता। शून्य की महत्ता के सम्बन्ध में प्रोफेसर हैल्स-टेड लिखते हैं, “शून्य के आविष्कार के महत्त्व की कभी भी अतिशयोक्ति नहीं की जा सकती। निरर्थक शून्य को केवल स्थान, सज्ञा, आकृति, एवं संकेत ही नहीं बल्कि एक उपयोगी शक्ति प्रदान करना हिन्दू जाति की, जहाँ से इसकी उत्पत्ति हुई है, एक विशेषता है। यह निर्वाण को विद्युत्शक्ति में परिवर्तित करने के मद्द्श है। गणित सम्बन्धी कोई भी एक आविष्कार ज्ञान एवं शक्ति को आगे बढ़ाने में इतना प्रबल नहीं मित्र हुआ है।”

आकार

एक दूसरे में भिन्न अनेक लिपियाँ आज भारतवर्ष के भिन्न-भिन्न भागों में प्रचलित हैं। इन लिपियों में अकों के आकार भी एक दूसरे में भिन्न हैं। यद्यपि सभी हिन्दू लिपियाँ एक ही मूलस्रोत, ब्राह्मी लिपि, से निकली हैं, तो भी विभिन्न आधुनिक लिपियों के आकारों में इतना अधिक भेद है कि यदि उनका प्राचीन इतिहास न ज्ञात होता तो उनके बीच में सम्बन्ध स्थापित करना कठिन हो जाना। उपर्युक्त कथन अक-चिह्नों के विषय में भी लागू होता है, जैसा कि मारिणी १५ में दिये गये अक चिह्नों की सूची के अध्ययन से स्पष्ट हो जायगा। अक-चिह्नों में इतना अधिक भेद यह प्रदर्शित करता है कि भारत-वर्ष में भिन्न-भिन्न लिपियों के प्रयोग में आने के पहले ही लोग शून्य और स्थान-मान का प्रयोग जानते थे, और वर्णमाला के अक्षरों की भाँति ही अक-चिह्न भी भारतवर्ष के भिन्न-भिन्न भागों में स्वतन्त्र रीति में परिष्कृत किये गये थे। और क्योंकि भिन्न-भिन्न स्थानों में आकारों में किये गये परिवर्तन एक दूसरे से स्वतन्त्र थे, इसलिए आधुनिक आकार एक दूसरे में इतने अधिक भिन्न हो गये हैं।

¹ जी० डी० हैल्टेड, ऑन दि फाउन्डेशन ऐण्ड टेकनीक ऑव ज़रिथमेटिक, शिकागो, १९१२, पृ० २०।

यह भेद ग्यारहवीं शताब्दी में भी पहले से विद्यमान था जैसा कि अलबेहरी के निम्न कथन से स्पष्ट है: 'जिस प्रकार भारतवर्ष के भिन्न-भिन्न भागों में अक्षरों के भिन्न-भिन्न स्वरूप हैं, उसी प्रकार अक्षरों के चिह्न भी एक दूसरे से भिन्न हैं।' नागरी लिपि के आकार

अत्यन्त महत्त्वपूर्ण तथा अत्यन्त प्रचलित अक्षर-चिह्न नागरी लिपि के हैं। इस चिह्न के आधुनिक आकार निम्नलिखित हैं —

१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, ०

इन आकारों का ब्राह्मी अक्षरों से क्रमिक विकास कैसे हुआ, मारिणी १४ में दर्शित किया गया है।

पुरालेख-सम्बन्धी उदाहरण

नीचे हम दसवीं शताब्दी तक मिलनेवाले उन अन्तर्लेखों तथा दानपत्रों की सूची दे रहे हैं जिनमें दशमलव स्थान-मान संकेत का प्रयोग करके अक्षर लिखे गये हैं। इस काल के बाद के अन्तर्लेखों तथा दानपत्रों में अक्षर लिखने के लिए सदैव दशमलव पद्धति का प्रयोग किया गया है।

१. ५९४ ई० सखेडा से प्राप्त गुर्जरों का दानपत्र (एड,^१ २, पृ० १९)।

इसका काल, चेदि सवत् ३४६, दशमलव स्थान-मान संकेत में दिया है।

*२. ६४६ ई० बेलहारी का लेख, (जए,^२ १८६३)।

*३. ६७४ ई० कन्हेरी का लेख, (जए, १८६३, पृ० ३९२)।

४. ८वीं शताब्दी जयवर्धन द्वितीय का रघोली का दानपत्र, (एड,^३ ९, पृ० ४१)। अक्षर ३० दशमलव संकेत में दिया है।

५. ७२५ ई० ब्रिटिश म्यूजियम में संगृहीत संस्कृत के दो दानपत्र, (इए,^४ १३, पृ० २५०)। इनके काल, सवत् ७८१ (=७२३ ई०) और सवत् ७८३ (=७२५ ई०), दशमलव संकेत में दिये हैं।

^१ भा. त. अलबेहरी कृत, जिद १, पृ० ७४।

^२ जए = एपिग्राफिया इण्डिका।

^३ इए = इटियन ऐपिग्राफरी।

^४ जए = जर्नल एशियाटिक।

- *६ ७३६ ई० धिनिकी ताम्र दानपत्र, (इएँ, १२, पृ० १५५) । इसका काल, सवत् ७९४, दशमलव सकेत मे है ।
- ७ ७५३ ई० देवेन्द्रवर्मन् का चिकाकोल का दानपत्र, (एइ, ३, पृ० १३३) । अक २० दशमलव सकेत मे लिखा है ।
- ८ ७५४ ई० दनिदुर्ग का राष्ट्रकूट दानपत्र, (इएँ, ११, पृ० १०८) । इसका काल, शक ६७५, दशमलव सकेत मे दिया है ।
- ९ ७९१ ई० सामन्त देवदत्त का अन्तर्लेख, (इएँ, १४, पृ० ३५१) । इसका काल, सवत् ८४७, दशमलव सकेत मे है ।
- १० ७९३ ई० शकरगण का दौलताबाद का दानपत्र, (इएँ, ९, पृ० १९७) । इसका काल, शक ७१५, दशमलव सकेत मे दिया है ।
- ११ ८१३ ई० तोरखेडा का दानपत्र, (एइ, ३, पृ० ५३, इएँ, ९, पृ० ३४५) । रचनाकाल, शक ७३५, दशमलव सकेत मे दिया है ।
- १२ ८१५ ई० नागभट का वुचकला का अन्तर्लेख, (एइ, ९, पृ० १९८) । इसका काल, स० ८७२, दशमलव सकेत मे दिया है ।
- १३ ८३७ ई० वाउक का अन्तर्लेख, (राजपूताना म्यूजियम, भारतीय प्राचीन लिपि माला, पृ० १२७, एइ, १८, पृ० ८७) । इसका काल, सवत् ८९४, दशमलव सकेत मे दिया है ।
- १४ ८४३ ई० कन्हरी से प्राप्त अन्तर्लेख, न० ४३ व, (इएँ, ८, पृ० १३३) । इसका काल, शक ७६५, दशमलव सकेत मे दिया है ।
- १५ ८५१ ई० कन्हरी मे प्राप्त अन्तर्लेख, न० १५, (पूर्ववत्) । इसका काल^१, शक ७७५, दशमलव सकेत में दिया है ।
- १६ ८५३ ई० ललितसुरदेव का पाडुकेश्वर का दानपत्र, (इएँ, २५, पृ० १७७) । इसका काल, राजा के राज्यकाल का सवत् २१, दशमलव सकेत मे है ।

^१ षाल की शुद्धि के लिए, देखिए इएँ, २०, पृ० ४२१ ।

- १७ ८६० ई० कक्कुका का घटियाला का अन्तर्लेख, (एइ, ९, पृ० २७७)।
इसका काल मवत् ९१८, दशमलव सकेत में दिया है।
- १८ ८६२ ई० भोजराज का देवगढ़ का जैन अन्तर्लेख, (एइ, ४, पृ० ३०९)। काल, मवत् ९१९ और मगत शक ७८४, दशमलव सकेत में है।
- १९ ८७० ई० भोजदेव के राज्यकाल का ग्वालियर का अन्तर्लेख, (आर्कियालॉजिकल सर्वे ऑफ इंडिया, रिपोर्ट, १९०३-४, प्लेट ७२), यद्यपि इसमें समय नहीं दिया है, तथापि श्लोको की मर्यादा, १ में लेकर २६ तक, दशमलव सकेत में है।
- २० ८७६ ई० अल्ला का ग्वालियर का अन्तर्लेख, जो भोजदेव के शासन-काल का है, (एइ, १, पृ० १५९)। इसका काल, मवत् ९३३, तथा मर्यादें २७०, १८७, और ५० दशमलव सकेत में है।
- २१ ८७७ ई० कन्होरी से प्राप्त अन्तर्लेख, न० ४३ अ, (इएँ, १३, पृ० १३३)। इसका काल, शक ७९९, दशमलव सकेत में लिखा है।
- २२ ८८२ ई० पट्टोआ का अन्तर्लेख, (इएँ, १, पृ० १८६)। इसका रचना काल, वर्ष मवत् २७६, दशमलव सकेत में दिया है।
- २३ ८९३ ई० बालवर्मन का दानपत्र, (एइ, ९, पृ० १)। इसका काल, बलभी मवत् ९५६, दशमलव सकेत में दिया है।
- २४ ८९९ ई० अवनिवर्मन् का दानपत्र, (एइ, ९, पृ० १)। मवत् ९५६ दशमलव सकेत में दिया है।
- २५ ९०५ ई० आहर का पापाण लेख, (जनरल युनाइटेड प्रोविसेज हिस्टारिकल सोसायटी, १९२६, पृ० ८३ और आगे)। इसमें बहुत से काल मिलते हैं, जो मवत् दशमलव सकेत में लिखे हैं।
- २६ ९१० ई० कृष्ण द्वितीय का राष्ट्रकूट दानपत्र, (एइ, १, पृ० ५३)। इसका काल भी दशमलव सकेत में दिया है।

- २७ ९१७ ई० मस्कृतन और प्राचीन कन्नड के लेख, न० १७०, (इएँ, १६, पृ० १७४)। मवत् ९७४ दशमलव सकेत मे दिया है। मख्या ५०० भी प्रयोग की गयी है।
- २८ ९३० ई० गोविंद चतुर्थ का खभात का लेख, (एइ, ७, पृ० २६)। शक ८५२ दशमलव सकेत मे दिया है।
- २९ ९३३ ई० राष्ट्रकूट राजा गोविंदराज चतुर्थ का मागली का दानपत्र, (इएँ १२, पृ० २४९)। शक ८५५ दशमलव सकेत मे दिया है।
- ३० ९५१ ई० सस्कृत और प्राचीन कन्नड के लेख, न० १३५, (इएँ, १२, पृ० २५७)। शक ८७३ दशमलव सकेत मे दिया है।
- ३१ ९५३ ई० यशोवर्मन् का लेख, (एइ, १, पृ० १२२)। मवत् १०११ दशमलव सकेत मे दिया है।
- ३२ ९६८ ई० मियादोनी का पापाण-लेख, (एइ, १, पृ० १६२)। इस लेख मे अनेक मख्याएँ आयी है जो दशमलव सकेत मे लिखी है।
- ३३ ९७२ ई० अमोधवर्ष का राष्ट्रकूट दानपत्र, (इएँ, १२, पृ० २६३)। शक ८९४ दशमलव सकेत मे दिया है।

दशमलव स्थान-मान सकेत-पद्धति के प्रारम्भिक प्रयोग के पुरालेख-सम्बन्धी प्रमाण मुद्गरपूव के हिन्दू उन्निवेगो मे मिले है।^१ इनमे मवमे अधिक महत्त्वपूर्ण छ. अन्तर्लेख है, तीन वे जो श्रीविजय मे मिले है, दो वे जो सुमात्रा के पालमवग मे मिले है, और एक वह जो वका द्वीप मे प्राप्न हुआ है। इन अन्तर्लेखो मे एक शक ६०५, ६०६ और ६०८ (अर्थात् ६८३ ई०, ६८४ ई० और ६८६ ई०) अको मे लिखे मिले है। अन्य उदाहरण कम्बोडिया के सम्बोर नगर का अन्तर्लेख है, जिसमे शक ६०५ लिखा हुआ मिला है। चपा द्वीप के पो नगर के अन्तर्लेख मे शक ७३५ (=८१३ ई०) का प्रयोग हुआ है।

उपर्युक्त लेखो की कल्पित अविश्वसनीयता

उपर्युक्त सूची मे तीस मे अधिक ऐमे पुरालेख-सम्बन्धी उदाहरण दिये गये है, जो मित्र करने है कि भारतवर्ष मे अक लिपने के लिए बहुत पहले

^१ जी० कोटे, "ए प्रोपो दे लोरिजी दे शिफ्र आराव," व्लेटिन स्कूल ऑव ओरि-गटल स्टडीज (तदन), ६, १६३१, पृ० ३२३-८।

से स्थान-मान मिद्धान्त का प्रयोग होता था। जी० आर० के०,^१ जो स्थान-मान सकेत के अभासीय होने के मिद्धान्त को मानते हैं, कहते हैं कि इस मकेत के प्रयोग के लेखन सम्बन्धी सभी प्रमाण अविश्वसनीय हैं। कुछ जाली ताम्रपत्रों के आधार पर उनका कथन है कि ग्यारहवीं शताब्दी में “अपहरण किये हुए दान को पुनः पाने तथा नये दान को नये मित्रों से प्राप्त करने का अत्यन्त सुन्दर अवसर मिला”, और इसमें वे इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि लेखन सम्बन्धी सभी प्राचीन प्रमाण अवश्य ही अविश्वसनीय होंगे। इस प्रकार का तर्क स्वयं ही दोषपूर्ण है और उसके खंडन करने की कोई आवश्यकता नहीं।

अविकाश ताम्रपत्र वैयं लेख है, जिनमें उन दानों का वर्णन रहता है, जो धनी व्यक्ति अथवा राजा लोग किसी धार्मिक अवसर पर ब्राह्मणों को देते थे। इन पत्रों में दान देने के अवसर का, दान देनेवाले तथा पानेवाले के नामों का, दी हुई चल और अचल सम्पत्ति का, और दान देने की तिथि का (जो शब्दों में और अधिकतर अक्षरों में भी दी रहती है) विवरण रहता है। जाल दो प्रकार का हो सकता है (१) मूल लेख में ही या तो दान देनेवाले या पानेवाले का नाम अथवा अचल सम्पत्ति का विवरण ताम्रपत्र को पीटकर मिटा दिया जाय और उसके स्थान पर नया नाम या नया विवरण लिख दिया जाय। ऐसा जाल आमानी में मालूम किया जा सकता है, क्योंकि जिस स्थान पर ताम्रपत्र पीटा जायगा वहाँ के धरातल में विषमता आ जायगी और दूसरे नयी और पुरानी लिखावट में अन्तर होगा। (२) एक विलकुल नया जाली ताम्रपत्र बनाया जा सकता है। ऐसे उदाहरण, यद्यपि विरले होंगे, तो भी उनका आमानी से पता लगाया जा सकता है, क्योंकि ताम्रपत्र में अंकित तिथि और ताम्रपत्र में लिखे हुए अक्षरों के आकारों के आधार पर निर्धारित तिथि में स्पष्ट अन्तर रहेगा। इस प्रकार के जाली ताम्रपत्रों के सम्पादन में हीनता होती है, तथा वश के वर्णन या अन्य ऐतिहासिक तथ्यों में भी अशुद्धियाँ रहती हैं।

ताम्रपत्र विशेषज्ञों को जाली ताम्रपत्रों का पता लगाने में अब तक कोई कठिनाई नहीं पड़ी है। हम यहाँ यह बता दे कि हमारी सूची में सम्मिलित

^१ “नोट्स ऑन इंडियन मैथेमेटिक्स,” जर्नल ऑफ दि एशियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल, (नई श्रेणी, १९०७), जिल्द ३, पृ० ४८२-८७।

दानपत्रों की असलियत में किसी नामपत्र-विशेषज्ञ ने किसी प्रकार का गन्देह नहीं पकट किया है।'

के महोदय ने अपने लेख में, जो ऊपर उद्धृत किया जा चुका है, १८ गिला-लेखों और दानपत्रों की एक सूची दी है और उनमें में दो को छोड़कर शेष १६ को जाली बताया है। इस सम्बन्ध में उन्होंने जो तर्क उपस्थित किये हैं तथा जिन तथ्यों का कथन किया है, अधिकतर अशुद्ध और भ्रमात्मक हैं, अतएव उनके निष्कर्षों को स्वीकार नहीं किया जा सकता। उनके तर्क करने का ढंग दिवाने के लिए, उदाहरण के तौर पर, गुर्जरो के दानपत्र पर (जो हमारी सूची में पहले नम्बर पर है) उनकी अलोचना उद्धृत कर रहे हैं। वे लिखते हैं 'डा० वूलर ने चेदि सवत् ३४६ (=५९४ ई०) के गुर्जरो के दानपत्र को यह कटकर उद्धृत किया है कि यह सबसे पहला लेख है जिसमें दशमलव मकेत का प्रयोग मिलता है। (१) इस दानपत्र (एड, २, पृ० २०) की परीक्षा करने पर यह सम्भावना प्रतीत होती है कि उसमें दिये हुए एक दानपत्र के लिखे जाने के कुछ समय बाद के जोड़े हुए हैं दानपत्र में दिया हुआ समय 'तीन सौ छियालीस' शब्दों और अको दोनों में है। एक दानपत्र के बिल्कुल अंत में दिये हैं और अत्यन्त असाधारण तौर पर विराम-द्वय द्वारा अलग कर किये गये हैं। (२) एक उक्त काल के अको के सदृश है, लेकिन वे बहुत समय बाद भी प्रचार में थे, और किसी अन्य उदाहरण में ऐसे अको का प्रयोग स्थान-मान के साथ नहीं हुआ है। (३) इसके अतिरिक्त (अन्य लेखों में) नौ तिथियाँ पुराने मकेत में भी मिली हैं, (एड, ५), उदाहरणार्थ, गुर्जरो के भडोच के दानपत्र में चेदि सवत् ३९१ (=६४० ई०) पुराने मकेत में दिया है। पुनश्च, कोई अन्य चेदि सवत् ऐसा नहीं मिलता, कम में कम ग्यारहवीं शताब्दी के पहले का जो

'यदि इनमें से कोई जाली है भी तो जाल इतना अच्छा किया गया है कि उसका पता नहीं चल सकता। ऐसे दानपत्र यदि हो भी तो उनकी लिखावट में इतना सुन्दर जाल है कि वह उसी समय का मालूम पड़ता है जिस समय का वह दानपत्र माना जाता है। अतएव जहाँ तक अकलेखन की रीति से संवध है उन दानपत्रों की प्रामाणिकता को अस्वीकार नहीं किया जा सकता, चाहे वे आगे चल कर जाली हो क्यों न सिद्ध कर दिये जायें, परन्तु इसकी संभावना बहुत कम है। यह ध्यान देने योग्य है कि हमारी सूची में बहुत से पाषाणलेख भी सम्मिलित हैं, जिनका जाली होना असम्भव है।

आधुनिक दशमलव मकेन में हो। (४) भाग्यवर्ग में आधुनिक मकेन-प्रणाली के प्रारम्भिक प्रयोग के इस प्रमाण-विशेष की सारहीनता के विषय में दूर की भी कोई सम्भावना नहीं है।'

निम्नलिखित कथन में विदित होगा कि के महोदय के तर्क और उनके निगम निरावार एवं अप्रामाणिक हैं

(१) उक्त दानपत्र (एड, २, पृ० १९) की परीक्षा करने पर प्रत्येक व्यक्ति को उसकी असंलियत पर पूर्ण विश्वास हो जायगा। उसकी लिखावट बड़ी है और साफ है, अक्षर अक्षर लिखे गये हैं और, जैसा होना चाहिए, वे 'तीन मां छियालीं' शब्दों के ठीक बाद में लिखे गये हैं। पुनश्च, जैसा होना चाहिए, वे बड़ी पाइया लगाकर लिखे हुए शब्दों में अलग कर दिये गये हैं। पृथक्करण की इस रीति में किसी मदेह का किञ्चिन्मात्र भी स्थान नहीं है, क्योंकि ऐसी रीति भाग्यवर्ग में सामान्यरूप में प्रचलित है और प्रायः देखने में आती है। यह भी अच्छी तरह से ज्ञात है कि लेखों के अन्त में निधि लिखने की परिपाटी थी।' वस्तुतः, निधिमूचक अक्षर प्रायः किसी लेख के अन्त होने की सूचना देने हैं।' दोहरी खड़ी रेखाएं अन्तप्रिगम के चिह्न हैं। यद्यपि प्राचीनतम जन काल में ही भाग्यवर्ग में विराम चिह्न का प्रयोग होता रहा है, तो भी अभी हाल तक उसका प्रयोग नियमित अथवा अनिवार्य नहीं था।' भिन्न-भिन्न लेखकों ने भिन्न-भिन्न चिह्नों का भिन्न-भिन्न प्रकार में प्रयोग किया है। अन्तर्लेखों में दोहरी खड़ी रेखा या प्रयाग वाक्यों के अन्त में, आधे श्लोक के बाद, पूरे श्लोक के बाद, और बड़े-बड़े गद्यांशों के अन्त में मिलता है। जनार के अन्तर्लेख में इसका प्रयोग अक्षरों के बाद, और एक बार दान देनेवाले के नाम के बाद भी हुआ है।' हस्तलिखित

'हमारी सूची में वर्णित अधिकांश ताम्रपत्रों में लेखनकाल अन्त में दिया हुआ है।

'ऐसी बात हृविष्क के नारगांव के दानपत्र में (आर्किआलॉजिकल सर्वे रिपोर्ट्स, १९०८-९, दानपत्र ५६), रुद्रदमन के अन्तर्लेख (इण्डिया, ८, पृ० ४२) में, तथा अन्य अन्तर्लेखों और दानपत्रों में भी है।

'कुछ तांबे के दानपत्र ऐसे भी हैं जिनमें किसी विराम चिह्न का प्रयोग नहीं मिलता। देखिए बूलर, पूर्वोक्त ग्रंथ, ६०।

'बूलर, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ८६।

पुस्तकों में अकों को नब्दी रेखाओं में अलग करने की प्रथा सामान्य रूप में मिलती है। ऐसा प्रयोग वक्षाली हस्तलिपि^१ में तथा अन्य बहुत सी हस्तलिपियों में मिलता है। अतएव अकों का दानपत्रों के अन्त में लिखा जाना और दोहरी नब्दी पाई का अन्तर्विराम के रूप में प्रयोग, लेख की प्रामाणिकता पर सदेह प्रकट करने का समुचित आधार नहीं माना जा सकता। यह सुझाव कि अक दानपत्र लिखे जाने के कुछ समय बाद जोड़ दिये गये हैं अयुक्त हैं, क्योंकि जब समय पहले ही से शब्दों में लिखा हुआ है तो किसी को क्या प्रयोजन कि वह बाद में अक जोड़ने का कष्ट उठावे।

(२) के महोदय मानते हैं कि दानपत्र के अक उन्नीस काल के अकों की तरह हैं जिस काल का दानपत्र है। परन्तु उनका यह कथन कि वे अक बहुत समय बाद भी प्रयोग किये जाते थे असत्य है। मारिणी ३-५ और १२ को देखने में स्पष्ट हो जायगा कि आठवीं शताब्दी के बाद अक ३ को सूचित करने के लिये तीन पड़ी रेखाओं का प्रयोग नहीं हुआ है। अक ४ के लिए हमारे दानपत्र में जिस चिह्न का प्रयोग किया गया है, वह छठी शताब्दी के बाद नहीं मिलता, और यही बात अक ६ के चिह्न के लिए भी सत्य है। इस प्रकार केवल अक चिह्नों के आकार ही यह सिद्ध कर देते हैं कि उक्त दानपत्र छठी शताब्दी का लिखा हुआ है, बाद का नहीं।

(३) चेदि सवत् उन ३४ सवत्तो में है, जिनका प्रयोग अन्तर्लेखों और दानपत्रों में मिला है। प्रस्तुत दानपत्र के बाद के लिखे हुए लेखों में चेदि सवत् के नौ सवत्तो का प्राचीन पद्धति के अकों में पाया जाना इस प्रमाणविशेष की अप्रामाणिकता नहीं सिद्ध करना, जैसा कि के महोदय के अनुसार हम लोगों को समझना चाहिये। यह केवल यही प्रदर्शित करता है कि भारतवर्ष में भी (अक-संकेत की) नवीन पद्धति को अपना महत्त्व स्थापित करने के लिये प्राचीन पद्धति के साथ संघर्ष करना पड़ा था, जैसा कि अन्य देशों में देखा गया है। अरब में नवीन पद्धति का प्रचार आठवीं शताब्दी में किया गया था, परन्तु पाँच-छह सौ वर्ष बाद

^१ उदाहरणार्थ, १५१, पत्र २(अ), १२५५८१, पत्र २(ब), १३३०१, पत्र १७ (ब)। निम्न प्रकार के उदाहरण सामान्य रूप से मिलते हैं १११४।६११६१, पत्र १६ (ब), और १२१, १४१, इत्यादि, पत्र ५ (ब)। वृद्धा असम्बद्ध अकों को रेखाओं से अलग नहीं किया गया है। 'उदा' और 'सूत्रम्' इत्यादि शब्दों के पहले और बाद भी दोहरी सड़ी पाइयाँ लगायी गयी हैं।

तक यह सामान्य प्रयोग में नहीं आयी। यूरोप में तो मोलह्वी गताब्दी के पहले जो जनसाधारण नवीन पद्धति का प्रयोग करने थे वे केवल अपवादमात्र थे। इस बात के श्रेष्ठ प्रमाण वनों के कलेंडर (almanacs) हैं। मन् १५५७ से लेकर मन् १५९६ तक के कलेंडरों में साधारणतः रोमन अकों का प्रयोग है, और मन् १५७८ वाले दवेवल के कलेंडर में हिन्दू अक रोमन अकों के साथ गौणरूप से दिये गये हैं।^१

अतएव हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि गुर्जर दानपत्र भारतवर्ष में (स्थान-मान युक्त) नवीन पद्धति के प्रयोग का प्रामाणिक उदाहरण है।

कुछ अन्य दानपत्रों की प्रामाणिकता के सम्बन्ध में भी के महोदय की आलोचना निराधार है। ये दानपत्र हमारी सूची में तारांकित कर दिये गये हैं।

नवीन पद्धति के अविष्कार का स्थान

यह पहले कहा जा चुका है कि १ में लेकर ९ तक के अकों के वही चिह्न जो भारतवर्ष में प्राचीनतम काल में प्रचार में थे नवीन पद्धति में स्थान-मान मकेत के साथ भी प्रयुक्त किये गये हैं। नवीन पद्धति से सम्बन्ध रखने-वाली अन्य महत्वपूर्ण बात बड़ी सख्याओं की रचना में अकों का क्रम है। हम ऊपर देख चुके हैं कि प्राचीन पद्धति में बड़े अक छोटे अकों के बायी ओर लिखे जाते थे।^२ स्थान-मानवाली पद्धति में भी, जिसमें बायी ओर के अकों का अपने स्थान के कारण अधिक मूल्य है, वही क्रम है। प्राचीन अक-पद्धति में लेकर नवीन अक-पद्धति तक होने वाला क्रमिक विकास केवल भारतवर्ष में ही देखा जा सकता है, और यह बात हमारे विचार से नवीन पद्धति की भारतीय उत्पत्ति के पक्ष में सबसे अधिक शक्तिशाली तर्क है। जैसा ऊपर देख चुके हैं, नवीन पद्धति के प्रयोग का सबसे प्राचीन लिखित प्रलेख ५९४ ई० का गुर्जर का दानपत्र है। समार का कोई भी देश इस पद्धति के प्रयोग का इतना प्राचीन उदाहरण नहीं उपस्थित कर सकता। अतएव आधुनिक अक-पद्धति की भारतीय उत्पत्ति सिद्ध करने के लिए केवल यह लिखित प्रमाण ही पर्याप्त है।

^१ स्मिथ और कार्पेस्की, पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ० १३३।

^२ इससे यह विदित होता है कि किसी अक के स्थान का निर्धारण उसके मान पर निर्भर रहता था। कुछ लोगों ने इसका यह अर्थ लगाया है कि यह एक प्रकार की स्थान-मान पद्धति थी, परन्तु यह अशुद्ध है।

आविष्कारक अज्ञात

यह पता नहीं कि नवीन पद्धति का जन्मदाता कौन था। यह भी नहीं मालूम कि यह आविष्कार किसी विद्वान-विशेष अथवा ऋषियों की मण्डली द्वारा किया गया था, अथवा किसी विशेष प्रकार के एवैकस के प्रयोग के कारण होनेवाले क्रमिक विकास का फल था। इसी प्रकार यह भी अज्ञात है कि इस आविष्कार का तथा इसके प्रथम बार प्रयोग किये जाने का श्रेय किम स्थान, नगर, प्रदेश अथवा विद्या के केन्द्र को है। पुरालेख-सम्बन्धी माध्य में इस विषय में कोई सहायता नहीं मिल सकती, क्योंकि अन्तर्लेखों में इसका प्रयोग उस समय हुआ जब कि इसके आविष्कार को हुए बहुत समय हो चुका था, वस्तुतः जब यह आविष्कार उत्तरी भारत में पूर्णतया प्रख्यात हो चुका था।

आविष्कार का समय

दानपत्र वैध प्रलेख होते थे और पेशेवर लोगो द्वारा लिखे जाते थे। ऐसे लेखकों का उल्लेख दक्षिण के बौद्ध आगमों तथा महाकाव्यों में मिलता है।^१ ये लोग 'लेखक', 'लिपिकार' और आगे चलकर 'दिविर', 'करण' और 'कायस्थ' आदि नामों से प्रसिद्ध थे। कल्हण के अनुसार^२, काश्मीर के राजा लोग वैध प्रलेखों के विकर्षण के लिए एक विशेष पदाधिकारी की नियुक्ति करते थे जो 'पट्टोपाध्याय' कहलाता था। 'लेख-पञ्चाशिका' और 'लेख-प्रकाश' जैसी पुस्तकों का अस्तित्व, जिनमें साधारण पत्र, भूमि-सम्बन्धी दान-पत्र, सन्धि-पत्र तथा विविध प्रकार के बन्धपत्र और विनिमय-पत्रों (हुडियों) के विकर्षण की विधियाँ वर्णित हैं, निस्मदेह सिद्ध करता है कि दानपत्रों का लेखन एक विशिष्ट कला थी और इन पत्रों के लिखने की रीति अपने समय से सैंकड़ों वर्ष पहले की रही होगी, जैसी कि आजकल के वैध तथा राजकीय प्रलेखों की होती है। अतएव नवीन पद्धति के आविष्कार का समय गुर्जर दानपत्र के रचना-काल (६वीं शताब्दी), जिसमें इसका प्रयोग हुआ है, से कई शताब्दियाँ पूर्व-निर्धारित

^१ बलर पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ५।

^२ राजतरंगिणी, ५, पृ० ३६७ आदि।

करना पड़ेगा। इस आविष्कार का निश्चित काल अन्य देशों के अक-मकेत के विकास के इतिहास के आधार पर स्थूल रूप से कल्पित किया जा सकता है।

हीथ' के अनुसार यूनानी वर्णमाला-मकेत का आविष्कार सातवीं शताब्दी ई० पू० में हुआ था, परन्तु सामान्य रूप से उसका प्रयोग केवल दूसरी शताब्दी में ही हुआ। इस प्रकार उसके प्रसिद्ध होने में ८०० वर्ष लगे। अरब में नवीन मकेत का प्रचलन ८वीं शताब्दी में किया गया था, परन्तु उसका सामान्य प्रयोग ५ या ६ सौ वर्ष बाद ही हुआ। अरब लोगों को तो गणित के परिकर्मों की प्रयोग-विधि के साथ सम्पूर्ण दशमलव गणित ऐसे समय में प्राप्त हुई थी जब अरब में बौद्धिक व्यापार अपनी पराकाष्ठा पर था, फिर भी दशमलव-पद्धति को सामान्य वृत्तान्त में उन्हे लगभग ५ या ६ सौ वर्ष लग गये।^१ वैदिक प्रलेखों में और ऐतिहासिक तिथियों के अभिलेखन में अरबवाले आज भी अपने प्राचीन वर्णमाला-मकेत का ही प्रयोग करते हैं।

पुरालेख सम्बन्धी प्रमाणों से विदित होता है कि आठवीं शताब्दी में भारत-वर्ष में सामान्य रूप से नवीन पद्धति का प्रयोग होता था, और दशवीं शताब्दी के मध्य तक प्राचीन पद्धति का उत्तरी भारत में लोप हो चुका था। अतएव नवीन पद्धति के आविष्कार का समय प्रथम शताब्दी ई० पू० और तीसरी शताब्दी के बीच में कही रखा जा सकता है। तथापि इस आविष्कार का वास्तविक समय पहली शताब्दी ई० पू० के मन्निकट, अथवा इसके पूर्व ही, रहा होगा, क्योंकि यह पद्धति अपने आविष्कार के बहुत समय बाद तक केवल कौतुक की वस्तु रही होगी और इसका प्रयोग केवल बड़ी-बड़ी मख्याओं के लिखने में ही किया जाता रहा होगा। इससे भी अधिक समय जोड़, बाकी, गुणा, भाग, वर्ग, वर्गमूल आदि गणित के परिकर्मों के नियम बनाने में लगा होगा। और इन नियमों के बन जाने के बाद ही गणितज्ञ लोग इसे अपने प्रयोग में लाये होंगे। उसके बाद भी

^१ हीथ, हिस्ट्री ऑफ ग्रीक मैथेमेटिक्स, भाग १, आक्सफोर्ड, १९२१, पृ० ३४।

^२ ११वीं शताब्दी में लिखी गयी अल-खर्की की अकगणित में दशमलव पद्धति का प्रयोग नहीं किया गया है। इससे ज्ञात होता है कि उस समय अरब में गणितज्ञों के दो संप्रदाय थे, जिनमें से एक हिन्दू अकों के प्रयोग के पक्ष में था और दूसरा जिसने प्राचीन अकों का प्रयोग करना नहीं छोड़ा था। 'इन्माइकलोपीडिया ऑफ इस्लाम' में 'हिस्ाब' पर एच० सूटर का लेख देखिए।

सामान्य रूप से प्रसिद्ध होने में इसे लगभग ५०० या ६०० वर्ष लगे होंगे, जैसा कि अरब में हुआ। इस प्रकार इस पद्धति के आविष्कार और सामान्य रूप में प्रचलित होने के कालों में लगभग ८०० वर्ष का अन्तर अवश्य पड़ा होगा, जैसा कि यूनानी वणमाला-मकेत के सम्बन्ध में हुआ। अतएव केवल पुरालेख-सम्बन्धी प्रमाणों के आधार पर ही हम इस आविष्कार को ईसवी सन् के आरम्भ में, अधिक सम्भवतः प्रथम शताब्दी ई० पू० में, रख सकते हैं। साहित्यिक तथा अन्य प्रमाणों से भी, जिनकी चर्चा आगे की जायगी, इस निष्कर्ष को समर्थन मिलता है।

९ प्राचीन पद्धति का अन्त

अक लिखने की प्राचीन पद्धति, जिसमें स्थान-मान सिद्धान्त सम्मिलित नहीं था, साधारणतः सातवीं शताब्दी तक के लेखों में मिलती है। उस समय के बाद, स्थान-मान सिद्धान्त के पक्ष में, उसका प्रयोग धीरे-धीरे बन्द कर दिया गया। तो भी दशवीं शताब्दी के आरम्भ तक प्राचीन पद्धति का प्रयोग यदा-कदा नेपाल में तथा दक्षिण-भारत के लेखों में देखने को मिलता है, परन्तु इस काल के बाद प्राचीन पद्धति लोगों को भूल सी गई और उसका प्रयोग बिल्कुल नहीं हुआ। सातवीं शताब्दी में सामान्य रूप में तो नवीन पद्धति का ही प्रयोग होता था, परन्तु अन्तर्लेख आदि के लिखने में प्राचीन पद्धति को मान्यता दी जाती थी। आठवीं शताब्दी के लिखे हुए बहुत से दानपत्र ऐसे हैं जिनमें अक तो प्राचीन पद्धति के अनुसार हैं परन्तु उनके लिखने में अशुद्धियाँ हैं, जिससे विदित होता है कि उस समय लोग अक लिखने की प्राचीन पद्धति भूल चुके थे। उदाहरणार्थ, शीलादित्य पण्ड के दानपत्र^१ में जो गुप्त सवत् ४४१ (=७६० ई०) का है, १०० के चिह्न में ४ का चिह्न जोड़ने की जगह, ४० का चिह्न जोड़ा गया है, तदनुसार ४०० के स्थान में ४००० लिखा गया है। इसी प्रकार एक दूसरे दानपत्र में, जो गागेय सवत् १८३ (=७५३ ई०) का है, १८३ लिखने में अशुद्धि की गई है।^२ इस दानपत्र का एक विशेष महत्त्व है, क्योंकि इसमें प्राचीन और

^१ इडियन ऐटिवेरी, ६, पृ० १६, (दानपत्र)।

^२ एपिग्राफिया इंडिका, ३, पृ० १३३, (दानपत्र)। इसमें ८० के लिए ८ का चिह्न और ३० के लिए ३ का चिह्न लिखा गया है। २० लिखने के लिए २ का चिह्न लिखकर उसके आगे एक दिन्दु रख दिया गया है।

नवीन दोनों पद्धतियों का एक साथ प्रयोग किया गया है।^१ दोनों पद्धतियों को एक साथ प्रयोग करनेवाला एक दूसरा मनोरंजक उदाहरण आहर दानपत्र है।^२ इस दानपत्र में ३७ वर्षों के अन्दर अनेक अवसरों पर दिये गये दानों की सूची दी गयी है, लेख की अन्तिम पूर्ति ९०५ ई० में हुई है। इस लेख की प्रथम छ पक्तियों में प्राचीन पद्धति का प्रयोग है, परन्तु आगे की पक्तियों में प्राचीन पद्धति का त्याग करके नवीन पद्धति का प्रयोग किया गया है। अकों के आकारों से स्पष्ट है कि लेखक प्राचीन पद्धति में अनभिज्ञ था। उदाहरणार्थ, २०० लिखने के लिए सु (= १००) में प्राचीन पद्धति के अनुसार मात्रा का चिह्न न जोड़कर २ का अंक जोड़ दिया गया है। इसी प्रकार १० लिखने में भी अगुट्टि है, लेखक ने १० के चिह्न के बाद शून्य लिख दिया है। इस लेख से प्रतीत होता है कि यद्यपि प्राचीन पद्धति का प्रयोग विलकुल वन्द हो चुका था, तो भी लोग अन्तर्लेख आदि में उसी का प्रयोग करते थे, कदाचित् उन्हीं कारणों से जिन कारणों से अध्यायों के अंकन में तथा घड़ियों के ऊपर घटासूचक अंक लिखने में आज भी रोमन अकों का प्रयोग किया जाता है।

१० शब्दाक-पद्धति

पद्धति का वर्णन,

ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों में, स्थान-मान के क्रम से रखे हुए शब्दों द्वारा मख्याओं को सूचित करने की एक नयी पद्धति का विकास एवं मिश्रि की गयी। इस पद्धति में अकों को ऐसे शब्दों द्वारा सूचित करते हैं जो वस्तुओं, जीवों अथवा भावों के नाम होते थे तथा स्वयं, या शास्त्र के विधान से, अकबोधक होते हैं। इस प्रकार अंक १ किसी ऐसी वस्तु द्वारा सूचित किया जा सकता है जो अपने प्रकार की एक ही है, जैसे पृथ्वी, चन्द्रमा, इत्यादि, अंक २ को ऐसी वस्तु से सूचित कर सकते हैं जिसके जोड़े होते हैं,

^१ दोनों पद्धतियों का मिश्रित प्रयोग करनेवाले अन्य उदाहरणों के लिए, देखिए पलीट गुप्त इस्क्रिप्शंस कॉन्स इस्क्रिप्शियोनम इटिकेरम, जिल्द ३ पृ० २६२, और इण्डियन ऐंटीक्वेरी, १४ पृ० ३५१, इसमें (८००) (४) (६) = ८४६।

^२ सी० डी० चटर्जी, 'दि आर्ट्स रटोन इस्क्रिप्शन', 'जर्नल यूनाइटेड प्राविगेज हिन्टारिक्व सोसायटी, १६२६, पृ० ८३-११६।

जैसे आँख, हाथ, युग्म, इत्यादि, इसी प्रकार अन्य अक भी सूचित किये जा सकते हैं। शून्य को अभ्र, आकाश, पूर्ण आदि शब्दों से सूचित करते हैं।

इस पद्धति का प्रयोग ज्योतिष, गणित तथा छंदशास्त्र के ग्रंथों में, समय सूचित करने के लिए अन्तर्लेखों तथा दानपत्रों में, और हस्तलिपियों में भी हुआ है। भारतवर्ष के प्राचीन ज्योतिषियों और गणितज्ञों ने अपने ग्रंथों को पद्य में लिखा। अतएव उनको ज्योतिष के ग्रंथों तथा गणित के उदाहरणों में आनेवाली बड़ी-बड़ी मख्याओं को सूचित करने के लिए सुगम रीति की आवश्यकता पड़ी। इसी आवश्यकता की पूर्ति के लिए शब्दाको का आविष्कार हुआ, और शीघ्र ही वे अत्यन्त प्रसिद्ध हो गये। आज भी जब बड़ी-बड़ी सख्याओं को पद्यबद्ध करना होता है तो इन्हीं अकों का प्रयोग किया जाता है।

एक से लेकर नौ तक अकों तथा शून्य को सूचित करनेवाले शब्दों को स्थान-मान मिद्धान्त के अनुसार प्रयोग करके किसी मख्या को सरलता से व्यजित किया जा सकता है। इस प्रकार सख्या १,२३० को कई प्रकार से सूचित कर सकते हैं, जैसे—

- (१) खगुणकरादि (ख-गुण-कर-आदि),
- (२) खलोककर्णचन्द्र (ख-लोक-कर्ण-चन्द्र),
- (३) आकाशकालनेत्रधरा (आकाश-काल-नेत्र-धरा), इत्यादि।

हम देखते हैं कि वही मख्या शब्दाको के द्वारा सैकड़ों प्रकार से सूचित की जा सकती है। इस विशेषता के कारण सख्याओं को छन्दबद्ध करने में शब्दाको अधिक उपयुक्त मिद्ध हुए हैं। और अधिक विविधता लाने के लिए दस से बड़े अक भी कभी-कभी विशेष शब्दों द्वारा सूचित किये जाते हैं।

शब्दाको की सूची

निम्नलिखित सूची उन शब्दों की है जो इस पद्धति में अकों को सूचित करने के लिए माधारण तौर से प्रयोग में आये हैं

अव

शब्द

- ० शून्य, ख, गगन, अम्बर, आकाश, अभ्र, वियत्, व्योम, अतरिक्ष, नभ, जलधरपथ, पूर्ण, रन्ध्र, विष्णुपद, अनन्त, इत्यादि।

- १ आदि, शशि, इंदु, विधु चन्द्र, कलाधर, हिमगु, शीताशु, क्षपाकर, हिमाशु, शीतरश्मि, प्रालेयाशु, मोम, गशाक, मृगाक, तिमकर,

मुवागु, रजनीकर, शशवर, श्वेत, अञ्ज, भू, भूमि, क्षिति, घरा, उर्वरा, गो, वसुन्वरा, पृथ्वी, क्षमा, घरणी, वमुवा, इला, मही, रूप, पितामह, नायक, तनु, इत्यादि।

२ यम, यमल, अश्विन्, नामत्य, दस्र, लोचन, नेत्र, अक्षि, दृष्टि, चक्षु, अम्बक, नयन, ईक्षण, पक्ष, बाहु, कर, कर्ण, कुच, ओष्ठ, गुल्फ, जानु, जघा, द्वय, द्वन्द, युगल, युग्म, अयन, कुटुम्ब, रविचन्द्रो, नय,^१ इत्यादि।

३ राम, गुण, त्रिगुण, लोक, त्रिजगत्, भुवन, काल, त्रिकाल, त्रिगत, त्रिनेत्र, हरनेत्र, सहोदरा, अग्नि, अनल, वह्नि, पावक, वैश्वानर, दहन, तपन, हुताशन, ज्वलन, शिखिन्, कृशानु, होतृ, पुर, रत्न^२ (जैन), इत्यादि।

४ वेद, श्रुति, ममुद्र, मागर, अन्वि, अम्भोव, अम्भोवि, जलवि, उदवि, जलनिधि, सलिलाकर, विपनिवि, वारिवि, पयोवि, पयोनिवि, अम्बुधि, केन्द्र, वर्ण, आश्रम, युग, तुर्य, कृत, अय, आय, दिश, वन्धु, कोष्ठ, गति, कपाय, इत्यादि।

५ वाण, शर, शस्त्र, सायक, इषु, भूत, पर्व, प्राण, पवन,^३ पाण्डव, अर्थ, विषय, महाभूत, तत्त्व, भाव, इन्द्रिय, रत्न, करणीय^४, व्रत, इत्यादि।

६ रस, अग, काय, ऋतु, मासार्थ, दर्शन, राग, अरि, शास्त्र, तर्क, कारक, लेख्य, द्रव्य, खर, कुमारवदन, पण्मुख, इत्यादि।

^१ द्रव्यार्थिक और पर्यायार्थिक दृष्टिकोणों से वस्तुओं को देखने की रीति को नय कहते हैं।

^२ इस शब्द को महावीर ने ३ के अर्थ में लिखा है, अन्य लोगों के मत से इसका अर्थ ५ है।

^३ देखो सिद्धान्त शेखर, १ २७, सिद्धान्त शिरोमणि, १, १० २। भट्टोत्पल ने इसे ७ के अर्थ में प्रयोग किया है, (बृहत्संहिता, अध्याय २, पर भट्टोत्पल की टीका देखिए)। अलबेरूनी की सूची में इस शब्द का अर्थ ६ दिया गया है, जो अशुद्ध है।

^४ जैनो के मतानुसार, अहिंसा, सुनृत, अमृत्य, ब्रह्मचर्य और अपरिग्रह को करणीय (अर्थात् करने योग्य) कहते हैं।

^५ इस शब्द को महावीर ने प्रयोग किया है।

- ७ नग, अग, भूभृत्, पर्वत, शैल, अचल, अद्रि, गिरि, ऋषि, मुनि, यति, अत्रि, वार, स्वर, धातु, अश्व, तुरग, वाजि, हय, छन्द, धी, कलत्र, तत्त्व^१, द्वीप, पन्नग^२, भय^३, मातृका, व्यसन, इत्यादि।
- ८ वसु, अहि, नाग, गज, दत्ति, द्विरद, दिग्गज, हस्तिन्, इभ, मार्तंग, कुजर, द्वीप, पुष्करिन्, सिन्धुर, सर्प, तक्ष, सिद्धि, भूति, अनुष्टुभ्, मगल, अनीक, कर्मन्^४, दुरित, तन्^५, दिक्^६, मद^७, इत्यादि।
- ९ अक, नन्द, निधि, ग्रह, रध, छिद्र, द्वार, गो, उपेन्द्र, केशव, ताक्ष्य-ध्वज, दुर्गा, पदार्थ^८, लब्ध, लब्धि, इत्यादि।
- १० दिश्, दिक्, दिशा, आशा, अगुली, पक्ति, ककुभ्, रावणशिर, अवतार, कर्मन्, इत्यादि।
- ११ रुद्र, ईश्वर, मृड, हर, ईश, भव, भर्ग, शूलिन्, महादेव, अक्षौहिणी, इत्यादि।
- १२ रवि, सूर्य, इन, अर्क, मार्तण्ड, द्युमणि, भानु, आदित्य, दिवाकर, मास, राशि, व्यय, इत्यादि।
- १३ विश्वेदेवा, विश्व, काम, अतिजगती, अघोष इत्यादि।
- १४ मनु, विद्या, इन्द्र, शक्र, लोग^{१०}, इत्यादि।
- १५ तिथि, घस्र, दिन, अहन्, पक्ष^{११}, इत्यादि।

^१ इस शब्द को महावीर ने प्रयोग किया है, क्योंकि जैन लोग ७ तत्त्व मानते हैं। अन्य लोगो ने इसे ५ के अर्थ में प्रयोग किया है।

^२ इस शब्द को महावीर ने प्रयोग किया है।

^३ इस शब्द को महावीर ने प्रयोग किया है।

^४ महावीर ने इसे ८ के लिए प्रयोग किया है, अन्य लोगो ने १० के लिए।

^५ इस शब्द को महावीर ने प्रयोग किया है।

^६ यह शब्द ८ और १० दोनों के लिए प्रयुक्त हुआ है। दिश् और दिक् शब्दों का प्रयोग ४ के अर्थ में भी मिलता है।

^७ इस शब्द को केवल महावीर ने प्रयोग किया है।

^८ यह शब्द १ के अर्थ में भी प्रयुक्त किया गया है।

^९ इस शब्द को केवल महावीर ने प्रयोग किया है।

^{१०} इसका ३ के लिए भी प्रयोग हुआ है।

^{११} इसका २ के अर्थ में भी प्रयोग हुआ है।

- १६ नृप, भूप, भूपति, अष्टि, कला, इत्यादि ।
 १७ अत्यष्टि ।
 १८ वृति ।
 १९ अतिवृति ।
 २० नख, कृति, इत्यादि ।
 २१ उत्कृति, प्रकृति, स्वर्ग, इत्यादि ।
 २२ आकृति, जाति (?), इत्यादि ।
 २३ विकृति ।
 २४ गायत्री, जिन, अहंत्, मिद्ध, इत्यादि ।
 २५ तत्त्व ।
 २६ नक्षत्र, उडु, भ, इत्यादि ।
 ३२ दन्त, रद, इत्यादि ।
 ३३ देव, अमर, त्रिदश, सुर, इत्यादि ।
 ४८ जगती ।
 ४९ तान ।

स्थान-मान के बिना शब्दाको का प्रयोग

वेदो में अक सूचित करने के लिए वस्तुओं के नामों का प्रयोग नहीं मिलता, परन्तु ऐसे उदाहरण अवश्य हैं जहाँ वस्तुओं को सूचित करने के लिए अकों का प्रयोग किया गया है। उदाहरणार्थ, ऋग्वेद में 'वर्ष' के अर्थ में 'द्वादश' का प्रयोग किया गया है^१, और अथर्ववेद में 'सात वस्तुओं के समूह (सात ममुद्र, इत्यादि)' के अर्थ में 'सप्त' का प्रयोग किया गया है^२। तथापि ऐसे उदाहरण भी हैं, जहाँ 'भिन्नो' को सूचित करने के लिए शब्दों का प्रयोग हुआ है, जैसे, कला= $\frac{१}{६}$, कुष्ठ= $\frac{१}{२}$, शफ= $\frac{१}{३}$ ।

शब्दों द्वारा पूर्णसंख्या सूचित करने के सबसे प्राचीन उदाहरण २०० ई० पू०

^१ यह शब्द प्रायः ५ को सूचित करता है, महावीर ने ७ के अर्थ में भी इसका प्रयोग किया है।

^२ 'देव हर्ति जुगुपुर्द्वादशस्य ऋतु नरोन प्रमिनन्त्येते.' (७, १०३, १)।

^३ 'ओ ये त्रिसप्त परियन्ते' (१ १ १) ।

के लगभग, गतपथ ब्राह्मण^१ और तैत्तिरीय ब्राह्मण^२ में, मिलते हैं। छादोग्य उपनिषद् में भी अनेक उदाहरण हैं। वेदाग ज्योतिष^३ (१,२०० ई० पू०) में भी कई स्थानों पर अको के अर्थ में शब्दों का प्रयोग हुआ है। कात्यायन^४ और लाट्यायन के श्रौतसूत्रों में २४ के अर्थ में 'गायत्री' का और ४८ के अर्थ में 'जगती' का प्रयोग किया गया है।

तो भी इतने प्राचीन काल में अक-सूचक शब्द कौतुक-मात्र ही थे, अको के अर्थ में उनका प्रयोग विरल था। इसके अतिरिक्त हमें ऐसे उदाहरण मिले हैं जिनसे विदित होता है कि शब्दों को दिये गये अकात्मक मानों में कुछ अस्थिरता भी थी। उदाहरणार्थ, एक ही ग्रन्थ, ऐतरेय ब्राह्मण में, 'विराट्' शब्द का प्रयोग एक स्थान पर १० के अर्थ में और दूसरे स्थान पर ३० के अर्थ में किया गया है। स्थान-मान सिद्धान्त अज्ञात होने के कारण बड़ी-बड़ी सख्याओं को सूचित करने के लिए शब्द सकेतो का प्रयोग नहीं हो सकता था, और उन सख्याओं को अक-संज्ञाओं द्वारा अथवा सख्या को टुकड़े-टुकड़े करके व्यक्त किया जाता था। स्थान-मान सिद्धान्त के बिना ही शब्दों का प्रयोग लगभग २०० ई० पू० में, पिंगल के छंदमूत्र में, मिलता है। प्रतीत होता है कि शब्दाक-पद्धति में स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग २०० ई० पू० और ३०० ई० के बीच में किसी समय हुआ।

^१ 'चतुष्पदेन कृतेन अयाना' (१३ ३ २ १)। इसमें 'कृत' शब्द का ४ के अर्थ में प्रयोग हुआ है।

^२ 'ये दं चत्वार स्तोमा कृत तत्' (१ ५ ११. १)।

^३ रूप=१, अय=४, गुण=युग=१२, भसम्ह=२७। देखिए (याज्यो २३; आज्यो ३१), (याज्यो १३, आज्यो ४), (आज्यो १६), (याज्यो २५), (याज्यो २०), क्रमानुसार। (याज्यो=याजुष-ज्योतिष, आज्यो=आर्च ज्योतिष)।

^४ कात्यायन श्रौत सूत्र (वेवर का संस्करण), पृ० १०१५।

६ ४ ३१।

^५ उदाहरणार्थ,

दशायुतानामयुत सहस्राणि च विशति।

षोड्य षष्टिश्च षट्चैव ह्यस्मिन् राजन्^१। मृधे हता ॥ (महाभारत, स्त्रीपर्व, २६ ६)। यहाँ पर ६६०१३०००० निम्न प्रकार से लिखा गया है १०(१०,०००) + १०,००० + २०(१,०००) + ६०(१,००,००,०००) + ६(१,००,००,०००)।

शब्दाक-पद्धति में स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग

स्थान-मान सिद्धान्त के साथ शब्दाकों का आधुनिक रूप में प्रयोग सबसे पहले अग्निपुराण^१ में मिलता है, जिसकी रचना ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों में हुई थी। भट्टोत्पल ने अपनी बृहत्संहिता-विवृति में मूल पुलिश-सिद्धान्त^२ से एक उद्धरण दिया है जिसमें शब्दाक-पद्धति का प्रयोग मिलता है। उद्धरण में प्रयुक्त सख्या है—ख (०) ख (०) अष्ट (८) मुनि (७) राम (३) अश्वि (२) नंत्र (२) अष्ट (८) शर (५) रात्रिपा (१) = १,५८,२२,३७,८००। उक्त ग्रन्थ^३ में पुलिश-सिद्धान्त के और भी बहुत से उद्धरण हैं जिनमें शब्दाकों का प्रयोग किया गया है। सूर्य-सिद्धान्त (ल० ३०० ई०), पचसिद्धान्तिका^४ (ल० ५५० ई०), महा- और लघु-भास्करीय^५ (६२९ ई०), ब्राह्म स्फुट-सिद्धान्त^६ (६२८ ई०), त्रिगुणिका^७ (ल० ७५० ई०), और गणित-मार-संग्रह^८ (८५० ई०) आदि बाद के ज्योतिष तथा गणित के ग्रन्थ, सभी शब्दाकों का प्रयोग करते हैं।^९

^१ अग्निपुराण, बगवासी संस्करण, कलकत्ता (१३१४ विक्रम सन्), अध्याय १२२-२३, १३१, १४०, १४१, ३२८-३३५। आधुनिक काल के सबसे बड़े पुराण-वेत्ता पार्जिटर का कथन है कि पुराण ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों के बाद के नहीं हो सकते। (देखिए, जर्नल रॉयल एशियाटिक सोसायटी, १९१२, पृ० २४४-५५)। सभी विद्वान मानते हैं कि अग्निपुराण सबसे अधिक प्राचीन पुराण है।

^२ बृहत्संहिता, सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, बनारस, पृ० १६३।

^३ पूर्वोक्त, पृ० २७, २९, ४९, ५१, इत्यादि। हम निश्चित रूप से नहीं कह सकते कि ये उद्धरण मूल ग्रन्थ से हैं अथवा बाद के किसी संस्करण से।

^४ १ ८, ८ १, इत्यादि।

^५ महा-भास्करीय, ७, लघु-भास्करीय, १।

^६ १ ५१-५५, इत्यादि।

^७ सूत्र ६, उदाहरण ६, इत्यादि।

^८ २ ७, ९, इत्यादि।

^९ यहाँ पर दिये गये प्रमाण के होते हुए भी जी० आर० के का कथन (देखिए इंडियन मैथेमेटिक्स, कलकत्ता, १९१५, पृ० ३१) कि शब्दाक नवीं शताब्दी में पूर्व से भारतवर्ष में लाये गये थे यह प्रदर्शित करता है कि या तो वे भारतीय गणित के प्रयोग के अनभिज्ञ हैं, अथवा उन्होंने जान-बूझकर असत्य भाषण किया है।

पुरालेखों में शब्दाक

शब्दाको के प्रयोग के प्राचीनतम पुरालेख-सम्बन्धी उदाहरण दो संस्कृत के अन्तर्लेखों में मिलते हैं। ये अन्तर्लेख कम्बोडिया में, जो प्राचीन काल में एक भारतीय उपनिवेश था, प्राप्त हुए हैं, और इनके रचना-काल क्रमानुसार ६०४ ई० और ६२५ ई० हैं। इसके बाद उक्त अको का प्रयोग जावा के एक संस्कृत अन्तर्लेख में मिलता है, जो आठवीं शताब्दी का है।^१

स्वयं भारतवर्ष में तो यद्यपि ज्योतिषियों और गणितज्ञों में तीसरी अथवा चौथी शताब्दी से ही इन अको का प्रयोग होता चला आ रहा है, तो भी बहुत समय बाद तक इनको अन्तर्लेखों में प्रयोग करने की प्रथा नहीं हुई। सबसे अधिक प्राचीन हिन्दू अन्तर्लेख जिनमें इन अको का प्रयोग हुआ है ८१३ ई०^१ और ८४२ ई०^२ के लिखे हुए हैं। इसके बाद की शताब्दी में इनका प्रयोग ९४३ ई०^३ में प्रसारित पूर्वी चालुक्य अम्म द्वितीय के पद्यों में मिलता है। आगे के काल में पुरालेख-सम्बन्धी उदाहरण अधिक शीघ्रता से मिलते हैं। बहुत-सी हस्तलिपियों में भी, जिनमें तिथियाँ पद्यबद्ध हैं, इस संकेत का प्रयोग मिलता है।^४

उत्पत्ति और प्रारम्भिक इतिहास

यह ध्यान देने योग्य है कि शब्दाको के प्रयोग से बनी हुई मर्यादों में अको का क्रम उस क्रम से विपरीत होता है जो कि उसी मर्यादा को अको के द्वारा लिखने में प्रयोग किया जाता है। इस तथ्य से कुछ विद्वान् भ्रमवश

^१ आर० सी० मजूमदार, एशन्ट इंडियन कालोनीज इन दि फार ईस्ट,— चपा, जिल्द १, लाहौर, १९२७, देखिए अन्तर्लेख न० ३२, ३६, और ४०, ४१, ४३, ४४।

^२ इंडियन ऐटिक्वेरी, ११, पृ० ४८।

^३ दि कडव प्लेड्स, इंडियन ऐटिक्वेरी, २१, पृ० ११, फ्लोट द्वारा सदिग्ध घोषित (कनारीज डिनेस्टोज, वाम्बे गैजेटियर, १, २. ३६६, नोट ७), देखिए बूलर, पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ० ८६, नोट ४।

^४ दि धोलपुर इस्क्रिप्शन, जाइट्थ्रुपट डेर डायशन मार्गेन्लैंडिशन गेगेलशाफ्ट, जिल्द ४०, पृ० ४२।

^५ इंडियन ऐटिक्वेरी, ७, पृ० १८।

^६ बूलर, पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ० ८६, नोट ७।

इस निष्कर्ष पर पहुँच गये हैं कि दशमलव-संकेत और शब्दाको की उत्पत्ति दो भिन्न-भिन्न स्थानों में हुई। जी० आर० के तो इतनी दूर पहुँच गये हैं कि उन्होंने सुझाव दिया है कि शब्दाक भारतवर्ष में पूर्व से आये। इस सुझाव की असत्यता तो केवल इसी में सिद्ध होती है कि संस्कृत के अतिरिक्त किसी भी भाषा में शब्द संकेत के प्राचीन-कालिक प्रयोग का कोई भी प्रमाण नहीं मिलता। और भारतवर्ष के अतिरिक्त किसी भी देश में चौथी शताब्दी पर्यन्त, जबकि भारतीय ज्योतिषी और गणितज्ञ शब्दाक-पद्धति को सामान्य रूप में प्रयोग में लाते थे, शब्दाक-पद्धति के प्रयोग का कोई चिह्न भी नहीं मिलता।

इस पद्धति के विकास की प्रारम्भिक अवस्थाओं में हम देखते हैं कि शब्दाको के स्थान पर अक-संज्ञाओं का प्रयोग किया जाता था, जो कि अकों की भाँति ही बायी ओर से दाहिनी ओर को लिखे जाते थे। इसका एक उदाहरण वक्षाली हस्त-लिपि^१ (लगभग २०० ई०) में मिलता है, जिसमें मर्यादा

२६५३२९६२२६४४७०६४९९ ८३२१८

निम्न प्रकार से व्यंजित की गयी है—

पड्विंशच्च (२६) त्रिपचाश (५३) एकोनत्रिंश (२९) एव च
द्वा [पण्टि] (६२) पड्विंश (२६) चतुष्वत्वारिंश (४४) सप्तति (७०)
चतु पण्टि (६४) न [वनवति] (९९) सनन्तरम्
त्रिंशीति (८३) एकविंश (२१) अष्ट (८) पकम् ।

नयापि उम्मी हस्तलिपि में ५४ को 'चतु (४) पच (५)' में व्यंजित किया गया है, और यह क्रम पहलेवाले क्रम का ठीक उलटा है।^२ जिनभद्र गणि (५७५ ई०) ने मर्यादों को सूचित करने में, बायी ओर में दाहिनी ओर के क्रम में, शब्दाको का प्रयोग किया है।^३ इसलिए ऐसा प्रतीत होता है कि आरम्भ में, शब्दाक पद्धति में, अक-स्थापन के क्रम के विषय में मतभेद था।

^१ पत्र ५८ (अ)। विन्दिद्यां यह सूचित करती है कि कुछ अक लुप्त हैं। स्पष्ट है कि प्रश्न को हल करने के लिए एक बड़ी संख्या को अकों में लिखने की आवश्यकता है। इस प्रकार का प्रश्न हमें किसी बाद के ग्रंथ में नहीं मिला। देखिए बी० दत्त, 'दि वक्षाली मैथेमेटिक्स,' बुलेटिन कलकत्ता मैथेमेटिकल सोसायटी, जिल्द २१, पृ० २१।

^२ पत्र २७ (अ)।

^३ बृहत्-श्रेष्ठ-ममाम, १ ६६ आदि।

पुलिश, बराहमिहिर और लल्ल आदि पहले के गणितज्ञों ने शब्दाको का अत्यधिक प्रयोग करके दाहिनी ओर से बायी ओर को लिखने की एक पद्धति सी डाल दी, जिसका बाद के लेखकों ने सामान्य रूप से अनुसरण किया।

दाहिनी ओर से बायी ओर के क्रम को मान्यता देने का क्या कारण था, इस बात का स्पष्टीकरण किसी प्राचीन ग्रंथ में नहीं मिलता। हम लोगों को इसका निम्नलिखित कारण प्रतीत होता है, और हमें विश्वास है कि संभवतः यही इसका वास्तविक कारण है। उद्देश्य यह था कि शब्दाको का चुनाव इस प्रकार हो कि सख्या-सूचक शब्द इष्ट छंद में ठीक-ठीक बैठ जायें। चुनाव को आसान करने के लिए इष्ट सख्या को पहले अंको में लिख लेते थे। उचित शब्दों का चुनाव अब स्वभावतः इकाई-वाले स्थान से आरम्भ होगा और बायी ओर अग्रसर होगा, जैसा कि गणित के परिकर्मों में होता है। यह क्रम 'अकाना वामतो गति' (अर्थात्, अंको की गति बायी ओर की होती है) के नियम के अनुरूप ही है, जो कि भारतीय गणितज्ञों में अत्यंत प्रसिद्ध था। अतएव दाहिनी ओर से बायी ओर को अंक लिखने के क्रम का कारण इस बात में निहित है कि हिन्दू गणितज्ञ शब्द-सख्याओं की रचना की विधि को एक प्रकार के गणितीय परिकर्म के रूप में देखना चाहते थे।

आविष्कार का समय

अग्नि-पुराण में, जो कि चौथी शताब्दी या इसके पहिले का लिखा हुआ है, शब्दाको का प्रयोग यह सूचित करता है कि शब्दाक-पद्धति उस समय (अर्थात् चौथी शताब्दी में) भारतवर्ष में सामान्य रूप से प्रसिद्ध हो चुकी होगी, क्योंकि पौराणिक ग्रंथ जन-साधारण के मतलब के होते हैं। पुलिश-सिद्धान्त और नूर्य सिद्धान्त में इसका विस्तृत प्रयोग मिलने से यह भी सूचित होता है कि चौथी शताब्दी में यह पद्धति पूर्णतया विकसित हो चुकी थी। अतएव इसका आविष्कार कम से कम दो शताब्दी पहले हो चुका होगा। इस प्रकार इस आविष्कार का समय १०० ई० से २०० ई० तक माना जा सकता है। इस निष्कर्ष को हम वान से समर्थन मिलता है कि इस संकेत का प्रयोग कम्बोडिया में प्राप्त ६०५ ई० के एक जन्तुलेख में मिलता है, जिसमें यह विदित होता है कि छठी शताब्दी के अंत तक उस पद्धति के ज्ञान का क्षेत्र यूरोप के तुल्य भूभाग में फैल चुका था।

यहां यह बताना आवश्यक है कि दशमलव स्थान-मान सिद्धान्त और शब्दाक-पद्धति का आविष्कार एक साथ नहीं हुआ था। जब शब्दाक-पद्धति में स्थान-मान

सिद्धान्त को प्रयोग करने विचार हुआ, उसके बहुत समय पहले दशमलव सकेत का अस्तित्व रहा होगा तथा गणितज्ञों में इसका सामान्य रूप से प्रयोग भी होता रहा होगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि आरम्भ में (अर्थात् २०० ई० के लगभग) स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग, जैसा कि आगा की जानी चाहिए, अक मज्ञाओं के साथ किया जाता होगा। बाद में छन्दों की सुविधा के लिए अक मज्ञाओं के स्थान में शब्दाकों का प्रयोग होने लगा होगा। अन्त में दाहिनी ओर से बायी ओर का क्रम भी ग्रहण कर लिया होगा, क्योंकि गणितज्ञ लोग शब्द-मख्याओं की रचना को एक प्रकार के गणितिक परिकर्म के रूप में देखना चाहते थे।

उपर्युक्त विचारों के आधार पर दशमलव स्थान-मान सकेत के आविष्कार का समय, शब्दाक-पद्धति के आविष्कार होने से कम से कम दो शताब्दी पहले निर्धारित किया जा सकता है। परन्तु, जैसा ऊपर दिखाया जा चुका है, शब्दाक-पद्धति का आविष्कार पहली शताब्दी के लगभग हुआ था, अतएव स्थान-मान सकेत के आविष्कार का समय पहली शताब्दी ई० पू० मानना पड़ेगा। यह निष्कर्ष उस निष्कर्ष के अनुरूप ही है जो पुरालेख-सम्बन्धी प्रमाणों के आधार पर स्थापित किया जा चुका है।

११ अक्षर-सकेत

अकों को सूचित करने के लिए वर्णमाला के अक्षरों का प्रयोग सबसे पहले पाणिनि की अष्टाध्यायी में मिलता है। पाणिनि ने मस्कृत वर्णमाला के स्वरों का अक्षरों के अर्थ में प्रयोग किया है।^१ परन्तु पाँचवीं शताब्दी तक इस अक्षर-सकेत के विस्तृत प्रयोग का कोई निश्चित प्रमाण उपलब्ध नहीं है। पाँचवीं शताब्दी के लगभग कई लेखकों ने, मख्याओं को पद्य में प्रयोग करने के प्रधान उद्देश्य

^१ पाणिनि की व्याकरण (अष्टाध्यायी) में कुछ सूत्र (नियम) ऐसे हैं जो आगे के कुछ सूत्रों में ही प्रयुक्त होते हैं सब में नहीं। ऐसे सूत्रों को पाणिनि ने स्वर चिह्नों से अंकित कर दिया है। सूत्र १ ३ ११ के भाष्य में पतञ्जलि ने लिखा है कि, कात्यायन (चौथी शताब्दी ई० पू०) के अनुसार, पाणिनि ने सूत्रों के ऊपर एक ऐसा अक-सूचक चिह्न लिख दिया है, जो यह बताता है कि वे सूत्र आगे के कितने सूत्रों तक प्रयुक्त होंगे। कण्वट ने इस कथन का स्पष्टीकरण करते हुए लिखा है कि पाणिनि के सूत्र ५ १ ३० के ऊपर लिखा हुआ स्वर 'इ' यह बताता है कि वह सूत्र आगे के २ सूत्रों में भी लगेगा। इस प्रकार, पाणिनि के अनुसार अ=१, इ=२, उ=३, इत्यादि।

मे, अक्षर-सकेत की भिन्न-भिन्न पद्धतियों का आविष्कार किया। शब्द-संख्याओं में शब्द बाहुल्य होने से, कभी-कभी एक ही संख्या को लिखने के लिए एक पूरे श्लोक अथवा एक से अधिक श्लोकों की आवश्यकता पड़ती है। शब्द-संख्याओं का यह लक्षण, कुछ भारतीय ज्योतिषियों को, जो लघुता और संक्षेपता को वैज्ञानिक कृति का प्रधान गुण समझते थे, स्वभावतः अच्छा नहीं लगा। अतएव ज्योतिष ग्रंथों में शब्द संख्याओं को बदलने के लिए अक्षर-सकेत का आविष्कार किया गया। भिन्न-भिन्न अक्षर-सकेत पद्धतियाँ^१, दशमलव स्थान-मान सकेत के साधारण प्रकारांतर हैं जिनमें अंकों के स्थान में अक्षरों का प्रयोग किया गया है। यहाँ पर यह जानना आवश्यक है कि भारतीय अक्षर-सकेत पद्धतियों का प्रयोग, यूनानी और अरबी पद्धतियों के प्रतिकूल, न तो साधारण जनता द्वारा किया गया और न गणना करने में ही हुआ। उनका ज्ञान विद्वानों तक ही सीमित रहा और उनका प्रयोग केवल संख्याओं को पद्यबद्ध करने में ही हुआ।

आर्यभट्ट प्रथम का अक्षर-सकेत

अक्षर-सकेत की एक पद्धति का आविष्कार आर्यभट्ट प्रथम (जन्म ४७६ ई०) ने किया था, जिसका प्रयोग करके उन्होंने ज्योतिषोपयोगी संख्याओं (बीजों) को दशगतीतिका^२ में पद्यबद्ध किया है। इस अवधि में उन्होंने दशगतीतिका में निम्नलिखित नियम दिया है

वर्गक्षराणि वर्गोऽवर्गोऽवर्गक्षराणि कात् इमौ य ।

खद्विनवके स्वरा नव वर्गोऽवर्गो नवान्त्यवर्गो वा ॥

^१ कुछ अक्षर-पद्धतियाँ, जिनका प्रयोग पत्राकन में मिलता है, स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग नहीं करतीं। इन पद्धतियों का आविष्कार लिपिकारों ने किया था, जो कदाचित् विद्वान् बनना चाहते थे और अपने पाण्डित्य का प्रदर्शन करना चाहते थे। इन पद्धतियों का प्रयोग केवल लिपिकारों तक ही सीमित रहा।

^२ दशगतीतिका में, जैसा नाम से सूचित होता है, दस पद्य होने चाहिए, परन्तु वास्तव में उसमें १३ पद्य हैं। इनमें से पहिले में परब्रह्म को प्रणाम करके वर्ण्य वस्तु का सकेत किया गया है, दूसरे में पुस्तक में प्रयुक्त अक्षर-सकेत का नियम समझाया गया है और १३वें में विषय का माहात्म्य वर्णित है। अतएव इन पद्यों को नहीं गिना गया है। देखिए, डब्ल्यू० ई० क्लार्क, "हिन्दू-अरेबिक न्यूमरल्स", इंडियन स्टडीज इन ऑनर आव चार्ल्स राँकवेल लैनमन, (हार्वर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस), १९२६, पृ० २३१।

निम्नलिखित अनुवाद में लेखक का अभिप्रेत अर्थ दिया गया है

“वर्गक्षर^१, जिनका आदि ‘क’ है, वर्गस्थानो^२ में (प्रयुक्त किये गये हैं), और अवर्गक्षर (जिनका आदि ‘य’ है) अवर्गस्थानो^३ में (प्रयुक्त किये गये हैं)। (इस प्रकार) डमो (=ड+म) का मान वही है जो ‘य’ का। नीं स्वर, शून्यो के (वर्ग और अवर्ग स्थानवाले) नीं जोड़ो के लिए (प्रयुक्त किये गये हैं)। यही (क्रिया) नीं (वर्ग और अवर्ग स्थानो) के बाद भी (प्रयुक्त की जा सकती है)।”

द्विग^४, ब्रास्खाउस, कर्न, वार्थ^५, रोडे^६, के, फ्लीट^७, दत्त^८, गागुली^९, दास^{१०}, लाहिडी^{११} और क्लार्क^{१२} ने उक्त नियम का विवेचन किया है।

‘ख’ का अनुवाद ‘स्थान (प्लेस)’ (जो क्लार्क ने किया है) अथवा ‘जगह (स्पेस)’ (जो फ्लीट ने किया है) अशुद्ध है। संस्कृत साहित्य में ‘अकस्थान’ के अर्थ में ‘ख’ का प्रयोग हमें कहीं नहीं मिला। ‘ख’ का अर्थ है, रिक्त, आकाश, इत्यादि, गणित और ज्योतिष के ग्रन्थों में यह शब्द ‘शून्य’ के अर्थ में प्रयोग किया

^१ क्, ख्, ग्, घ्, ङ् (कवर्ग), च्, छ्, ज्, झ्, ञ् (चवर्ग), ट्, ठ्, ड्, ढ्, ण् (टवर्ग), त्, थ्, द्, ध्, न् (तवर्ग), प्, फ्, ब्, भ्, म् (पवर्ग), ये २५ अक्षर वर्गक्षर कहलाते हैं। य्, र्, ल्, व्, श्, ष्, स्, और ह् अवर्गक्षर कहलाते हैं।

^२ वर्गस्थान का यहाँ पर अर्थ है, ओज-स्थान या विषम-स्थान।

^३ अवर्गस्थान का यहाँ पर अर्थ है, युग्म-स्थान या सम-स्थान।

^४ ट्राजैक्जस आंव दि लिटरैरी सोसायटी आंव मद्रास, १, १८२७, पृ० ५४।

^५ जाइंट्थ्रूपट पयुर डी कुडे डेस मार्गेनलैंडेस, जिल्द ४, पृ० ८१।

^६ जर्नल ऑव दि रॉयल एशियाटिक सोसायटी, १८६३, पृ० ३८०।

^७ ऊब्रे, जिल्द ३, पृ० १८२।

^८ जर्नल एशियाटिक, १८८०, २, पृ० ४४०।

^९ जर्नल ऑव दि एशियाटिक सोसायटी ऑव बंगाल, १९०७, पृ० ४७८; इंडियन मैथेमेटिक्स, कलकत्ता, १९१५, पृ० ३०, दि वक्षाली मैथ्युस्क्रिप्ट, कलकत्ता, १९२७, पृ० ८१।

^{१०} जर्नल ऑव दि रॉयल एशियाटिक सोसायटी, १९११, पृ० १०९।

^{११} साहित्य-परिपद्-पत्रिका, १९२६, पृ० २२।

^{१२} बुलेटिन कलकत्ता मैथेमेटिकल सोसायटी, १९२६, पृ० १९५।

^{१३} इंडियन हिस्टोरिकल क्वार्टरली, ३, पृ० ११०।

^{१४} ससार का इतिहास (बंगला भाषा में), जिल्द ४, पृ० १७८।

^{१५} आर्यभटीय ऑव आर्यभट्ट, शिकागो, १९३०, पृ० २।

स्वर शून्य नहीं जोड़ते। (क्लार्क की) व्याख्या किसी भी स्वर के लिए ठीक नहीं बैठेगी। उदाहरणार्थ, उनकी व्याख्या के अनुसार, स्वर 'इ' ग में दो शून्य जोड़ेगा परन्तु य में तीन शून्य जोड़ेगा। 'ख' का वास्तविक अभिप्राय क्या है, टीकाकार सूर्यदेव ने निम्नलिखित शब्दों में व्यक्त किया है “खानि शून्योपलक्षितानि सस्याविन्यामस्थानानि। तेषा द्विनवक, खद्विनवकम्। तस्मिन् खद्विनवके शून्योपलक्षितस्थानाष्टादश (१८) इत्यर्थः।” अर्थात् “ख से अभिप्राय सस्या लिखने के उन स्थानों में है जो शून्य के चिह्नो द्वारा प्रदर्शित किये जाते हैं। ऐसे १८ स्थान खद्विनक हैं। उन खद्विनको में अर्थात् शून्यचिह्नो द्वारा प्रदर्शित १८ स्थानों में, यह अर्थ है।” यहाँ पर हम यह बता दे कि हिन्दू लोग अक-स्थानों को शून्यों द्वारा प्रदर्शित करते हैं। भास्कर प्रथम (६२९ ई०) ने गणितपाद के दूसरे ब्लोक, जिसमें अकस्थानों की मज़ाएँ दी गयी हैं, की व्याख्या में लिखा है

भास्कर प्रथम ने शून्य के अर्थ में 'ख' शब्द की जो व्याख्या की है वह अधिक स्पष्ट है। उपर्युक्त श्लोक की व्याख्या में उन्होंने लिखा है ' "खद्विनवके स्वरा

‘खट्विनवके स्वरा नववर्गे। खानि शून्यानि, खाना नवक खट्विनवक,
नस्मिन् खट्विनवके, अष्टादशसु शून्योपलक्षितेषु ।’

नव वर्गों। 'ख' का अर्थ शून्य है, खद्विनवक का अर्थ शून्यों का नवक है, खद्विनवके का अर्थ है 'उम शून्यों के नवक में', अर्थात् 'शून्यों द्वारा प्रदर्शित १८ अकस्थानों में'।

अतएव यद्यपि यहाँ पर 'ख' 'अकस्थान' का ममानार्थक है।^१ तो भी 'ख को शून्य' से अनुवाद करना चाहिए। यहाँ पर अभिप्राय शून्य के चिह्न से है, न कि उर्ध्वाधर कोष्ठों में विभक्त फलक से।

'नवान्त्यवर्गों वा' का अनुवाद करने में क्लार्क को बड़ी कठिनाई का सामना करना पड़ा है। फ्लीट का सुझाव कि 'वा' के स्थान में 'हौ' होना चाहिए, स्वीकार नहीं किया जा सकता। जो अनुवाद हमने ऊपर दिया है वह (मास्कर प्रथम, सूर्यदेव, परमेश्वर और नीलकण्ठ द्वारा की हुई) सभी व्याख्याओं में सामंजस्य रखता है। सब टीकाएँ एकमत हैं।

नियम का स्पष्टीकरण

आर्यभट्ट प्रथम के नियम से उस विधि का ज्ञान होता है जिसमें अक्षर-सकेत में लिखी हुई सख्या दशमलव स्थान-मान सकेत में और दशमलव स्थान-मान सकेत में लिखी हुई सख्या अक्षर-सकेत में सूचित की जा सकती है।^२ अक-स्थान निम्न प्रकार से सूचित किये जाते हैं

ओ	ऐ	ओ	ए	लृ	ऋ	उ	इ	अ
अ	व	अ	व	अ	व	अ	व	अ
०	०	०	०	०	०	०	०	०

जिसमें 'व' वर्गस्थान को और 'अ' अवर्गस्थान को सूचित करता है।

ऊपर के चित्र में १८ अक-स्थान शून्यों द्वारा सूचित किये गये हैं तथा ९ जोड़ों में विभक्त किये गये हैं, प्रत्येक जोड़े में एक वर्गस्थान (अर्थात् विषम स्थान) और एक अवर्गस्थान (अर्थात् समस्थान) है।^३ वर्गक्षिरो (अर्थात् 'क' से लेकर 'म'

^१ आर्यभटीय के महाभाष्यकार नीलकण्ठ लिखते हैं: 'खद्विनवके अर्थात् १८ स्थानों में, जिनमें ९ वर्ग स्थान हैं और ९ अवर्ग स्थान हैं।' देखिए आर्यभटीय, के० साम्बशिव शास्त्री द्वारा संपादित, त्रिवेन्द्रम, १९३०, पृ० ६।

^२ वाद के लिख हुए भारतीय ग्रंथों में वर्ग और अवर्ग की जगह क्रमानुसार विषम और सम का प्रयोग किया गया है। वर्ग का प्रयोग वर्गसख्या अथवा वर्गाकार क्षेत्र के लिए भी किया गया है।

तक अक्षरो) का प्रयोग केवल वर्गस्थानो (अर्थात् विपम स्थानो) में होता है, और वे वर्गाक्षर क्रम से १, २, ३, , २५ अको को सूचित करते हैं। अवर्गाक्षरो (अर्थात् 'य' से लेकर 'ह' तक अक्षरो) का प्रयोग केवल अवर्गस्थानो (अर्थात् सम स्थानो) में होता है, तथा वे अवर्गाक्षर क्रम से ३, ४, , १० अको को सूचित करते हैं। प्रथम वर्गस्थान और प्रथम अवर्गस्थान मिलकर प्रथम वर्गवर्ग का जोड़ा बनाते हैं, द्वितीय वर्गस्थान और द्वितीय अवर्गस्थान मिलकर द्वितीय वर्गवर्ग का जोड़ा बनाते हैं, इत्यादि। इस प्रकार के नौ वर्गवर्ग के जोड़े क्रमशः नौ स्वरो से सूचित किये जाते हैं। प्रथम वर्गवर्ग का जोड़ा (अर्थात् इकाई और दहाई के स्थान) 'अ' स्वर से सूचित किये जाते हैं, द्वितीय वर्गवर्ग का जोड़ा (अर्थात् सैकड़े और हजार के स्थान) 'इ' स्वर से सूचित किये जाते हैं, इत्यादि। स्वर इस प्रकार स्थानों को—या स्थान सूचित करने की भारतीय पद्धति के अनुसार शून्यों को—सूचित करते हैं, परन्तु उनका स्वयं कोई अकात्मक मान नहीं है। जब कोई स्वर किसी व्यंजन में जोड़ दिया जाता है तब वह बताता है कि, स्थान-मान सिद्धान्त के अनुसार, उस व्यंजन द्वारा सूचित अक्षर का क्या स्थान होगा। उदाहरणार्थ, जब स्वर 'अ', अवर्गाक्षर 'य' में जोड़ दिया जाता है, तो उसका अर्थ यह है कि 'य' द्वारा प्रदर्शित अक्षर ३ का स्थान प्रथम अवर्गस्थान अर्थात् दहाई है। इस प्रकार $y = 30$ । इसके विपरीत, यदि 'अ' किसी वर्गाक्षर में जोड़ दिया जाता है, तब वह प्रथम वर्गस्थान अर्थात् इकाई को सूचित करता है। इस प्रकार $z = 5$, $m = 25$, और $dm = 30$ । इसी प्रकार 'यि' का अर्थ है कि 'य' द्वारा प्रदर्शित अक्षर ३ को द्वितीय अवर्गस्थान (अर्थात् हजार के स्थान) में रखना चाहिए, तथा 'गि' का अर्थ है कि 'ग' द्वारा प्रदर्शित अक्षर ३ को द्वितीय वर्गस्थान (अर्थात् सैकड़े के स्थान) के नीचे रखना चाहिए (क्योंकि 'ग' वर्गाक्षर है)। इस प्रकार $yi = 3000$, और $gi = 300$ । हो सकता है कि स्थान-

^१ इन अक्षरो को वर्गाक्षर कहने का कारण यह है, कि वे पांच-पांच अक्षरो के वर्गों (समूहों) में बाँट दिये गये हैं।

^२ जब दो व्यंजन एक साथ एक स्वर से जोड़ दिये जाते हैं, तब उन दोनों व्यंजनों द्वारा प्रदर्शित अक्षरों का सम्बन्ध एक ही 'वर्गवर्ग' के जोड़े से रहता है, और वे दोनों अक्षर आपस में जोड़ दिये जाते हैं। जैसे इस उदाहरण में, $dm = 5 + m = 5 + 25 = 30$ ।

मूचक शून्य, जो पहले ही लिख लिये जाते थे, मिटा दिये जाते हो और उनके स्थान में अक्षरो द्वारा प्रदर्शित अंक रख दिये जाते हो। इस प्रकार अकहीन स्थानों में स्वयं ही शून्य बचे रहगे। जब ऐसा नहीं किया जाता, और शून्यों के नीचे अंक लिखे जाते हैं, तब अकहीन स्थानों में शून्य रखना पड़ेगा।^१ अठारह में अधिक अंकों की मख्या होने पर, अनुस्वार युक्त स्वरों की कल्पना करके, अथवा किसी दूसरी युक्ति से, आगे के स्थानों को लिखकर उपर्युक्त क्रिया की जा सकती है।

इस पद्धति में एक अच्छाई यह है कि मख्या मूचक शब्द बहुत छोटे बनते हैं। परंतु यह अच्छाई इसके दो बहुत बड़े अवगुणों के सामने दब जाती है। पहला अवगुण यह है कि उस पद्धति की अक्षर मख्याओं को उच्चारण करना बहुत कठिन है। कुछ अक्षर-सख्याएँ तो इतनी जटिल हैं कि उनका उच्चारण ही नहीं सकता। दूसरे अवगुण के कारण इस पद्धति की अक्षर-मख्याओं में विविधता भी नहीं आने पाती, जो कि अन्य पद्धतियों में मभव है।

कटपयादि पद्धति

इस पद्धति में मख्याओं को व्यंजित करने के लिए, १ में लेकर ९ अंकों और शून्य के अर्थ में संस्कृत वर्णमाला के व्यंजनों का प्रयोग किया गया है। इस पद्धति की अक्षर मख्याएँ छोटी होती हैं और उच्चारण में प्रायः मधुर होती हैं। चतुर लेखक तो ऐसी अक्षर सख्याएँ बनाने में सफल हुए हैं कि जिनके प्रयोग में अर्थ का तारतम्य भी बना रहता है। यह पद्धति आर्यभट्ट की अक्षर-पद्धति तथा शब्दाक्षर-पद्धति दोनों से श्रेष्ठ है। भारतवर्ष में इस पद्धति के चार प्रकारों का प्रयोग मिलता है। कदाचित् इसी अनेकरूपता के कारण ही यह पद्धति सामान्य प्रयोग में नहीं आयी।

^१ यहाँ पर हम आर्यभट्टीय (१ ३) से कुछ उदाहरण दे रहे हैं

	ऋ	उ	इ	अ	
	० ०	० ०	० ०	० ०	
स्युघृ	{ घ्	य्	ख्		
	{ ४	३	२	० ० ०	०=४३२००००
चयगियिडुशुछलृ	{ ल छ	श्	ड्	य्	ग य् च्
	{ ५ ७	७	५ ३	३ ३	६=५७७५३३३६

^२ उदाहरणार्थ, निशिवृग्लृषृ, भदित्क्नुख्, इत्यादि।

पहला प्रकार

कटपयादि पद्धति का पहला प्रकार सद्रत्नमाला के निम्न श्लोक में वर्णित है

नञावचश्च शून्यानि सख्या कटपयादय ।

मिश्रे तूपान्त हल् सख्या न च चिन्त्यो हलस्वर ॥

अर्थात्, “न, ञ, और स्वर शून्य-सूचक हैं, क्, ट्, प् और य् से आरम्भ होने-वाले व्यजन (क्रम से १, २, ३, आदि) सख्याओं को सूचित करते हैं। मिश्र-व्यजनों में (केवल) स्वर-युक्त अंतिम व्यजन सख्या सूचक होता है, स्वर-रहित व्यजनों से सख्या न समझना चाहिए।”

अनएव इस पद्धति के अनुसार

क्, ट्, प्, य् अक १ को सूचित करते हैं ।

ख्, ठ्, फ्, र् , २ ” ” ”

ग्, ड्, ब्, ल् ” ३ ” ” ,

घ्, ढ्, भ्, व् ” ४ ” ” ”

ट्, ण्, म्, ण् ” ५ ” ” ”

च्, त्, प् ” ६ ” ” ”

छ्, थ्, म् ” ७ ” ” ”

ज्, द्, त् ” ८ ” ” ”

झ्, ध् ” ९ ” ” ”

ञ्, न् और केवल म्बर ” ० ” ” ”

स्वर युक्त व्यजनों का अंको के स्थान में प्रयोग उभी भाँति होता है जैसे स्थान-मान संकेत में। संयुक्त व्यजनों में केवल अंतिम व्यजन का अकात्मक मान होता है। अक्षर-संख्याओं की रचना में दाहिनी ओर से बायी ओर के क्रम का प्रयोग किया जाता है, जैसे कि शब्दाक्षर-पद्धति में होता है, अर्थात्, इकाईवाला अक्षर पहले लिखा जाता है, उसके बाद दहाईवाला, उसके बाद सैकड़वाला, इत्यादि। निम्न उदाहरण, जो अतल्लेखों, दानपत्रों, और हस्तलिपियों से उद्धृत किये गये हैं, इस पद्धति का स्वरूप स्पष्ट कर देंगे

	० ८ ८ १	
(१) ^१	रा - घ - वा - य	= १४४२,
	४ ४ ६	
(२) ^२	भ - व - ति	६४४,
	५ १ ३ १	
(३) ^३	श - त्या - लो - के	= १३१५,
	६ ४ ३ १	
(४) ^४	त - त्वा - लो - के	= १३४६,
	२ ३ १ ५ ६ ५ १	
(५) ^५	ख - गो - न्त्या - न्मे - प - मा - पे	= १५६५१३२।

इस पद्धति के उद्गम की खोज ५वीं शताब्दी पीछे तक की जा सकती है। सूर्यदेव के एक कथन^१ में, जो उनकी आर्यभटीय-व्याख्या में मिलता है, यह प्रतीत होता है कि यह पद्धति आर्यभट्ट प्रथम को ज्ञात थी।

दूसरा प्रकार

आर्यभट्ट द्वितीय (लगभग ९५० ई०) ने उपर्युक्त पद्धति के एक सुधरे हुए रूप का प्रयोग किया है। इस प्रकारान्तर में व्यंजनो के वही मान हैं जो ऊपर बताये जा चुके हैं, परन्तु केवल स्वरों या व्यंजन युक्त स्वरों का कोई मध्यात्मक मान नहीं है। और पहले प्रकार के विपरीत, मिश्र व्यंजन के प्रत्येक व्यंजन का स्थान क्रम के अनुसार अकात्मक मान होता है। अक्षर मध्याओ

^१ एपिग्रैफिया इटिका, जिल्द ६, पृ १२१।

^२ इडियन ऐटिकवेरी, २, पृ ३६०।

^३ एपिग्रैफिया इटिया, ३, पृ २२६।

^४ एपिग्रैफिया इटिका, ३, पृ ३८।

^५ यह पङ्गुहशिय की सर्वार्थानुक्रमणी-व्याख्या का रचना काल है, जो कलियुग-संवत् में है। इस का संगत ई० सन् ११८४ है।

^६ देखिए, दशगीतिका के परिभाषा-सूत्र की सूर्यदेव कृत व्याख्या। सूर्यदेव लिखते हैं “वर्गाक्षराणां सख्याप्रतिपादने कटपयादित्वं नञायाश्च शून्यत्वमपि सिद्धं, तन्निरासार्थं कात् ग्रहणम्।” अर्थात्, “वर्गाक्षरो की सहायता से सख्या प्रतिपादन करने में क्-ट्-प्-य् आदि का सख्यात्व और न तथा ज्ञ का शून्यत्व प्रसिद्ध है, अतएव उस पद्धति का खण्डन करने के हेतु ‘क से आरम्भ करके’ कहा गया है।”

में अक्षरो का क्रम बायी ओर से दाहिनी ओर को होता है, ठीक उसी प्रकार जैसे किमी सख्या को अको में लिखने में अको का क्रम होता है।' दोनों प्रकारों का अन्तर, अक्षर-सख्या ढ-ज-हे-कु-न-हे-त्-म-भा^१ से स्पष्ट किया जा सकता है। आर्यभट्ट द्वितीय के अनुसार यह अक्षर सख्या ४८८१०८६७४ सख्या को सूचित करती है, और प्रथम प्रकार के अनुमार ४७८०१८८४ सख्या को सूचित करती है।

तीसरा प्रकार

इस पद्धति का तीसरा प्रकारान्तर ब्रह्मा में प्राप्न पाली भाषा की कुछ हस्त-लिपियों में देखने को मिलता है।^१ यह पद्धति सभी बातों में पहले प्रकार की पद्धति के समान है, अन्तर केवल इतना है कि इस पद्धति में म=५, ह=६ और छ=९। इन अक्षरों के अकात्मक मानों में अन्तर होने का कारण कदाचित् यह है कि पाली वर्णमाला में श और ष अक्षरों का अभाव है।

चौथा प्रकार

चौथा प्रकार वह है जो दक्षिण भारत में प्रचलित था, और केरल-पद्धति के नाम से विख्यात है। यह भी पहले प्रकार के सदृश है, अन्तर केवल इतना है कि इस पद्धति के अनुमार वनी हुई अक्षर सख्याओं में अक्षरों का क्रम बायी ओर से दाहिनी ओर को होता है, ठीक उसी प्रकार जैसे किमी सख्या को अको में लिखने में अको का क्रम होता है।

अक्षरपल्ली

प्राचीन हस्तलिपियों के पत्राकन में जिन अक-सूचक अक्षरादि का प्रयोग मिलता है, उनके आकारों और क्रमों में विविध प्रकार की विलक्षणताएँ दृष्टि-गोचर होती हैं। इन अक-सूचक अक्षरों को अक्षरपल्ली, अर्थात् अक्षर-पद्धति,

^१ महामिद्धान्त (१ २) में इस पद्धति का विवरण इस प्रकार दिया गया है

रूपात् कटपयपूर्वा वर्णा वर्णक्रमाद्भवत्यका ।

ञ्ज्ञौ शून्य प्रथमार्थे आ छेदे ऐ तृतीयार्थे ॥

^१ महामिद्धान्त, १, १०।

^१ एल० डी० वॉनट, जर्नल ऑव दि रॉयल एशियाटिक सोसायटी, १६०७, पृ० १२७ आदि।

१ = ए, स्व, ऊँ

२ = द्वि, स्ति, न ।

३ = त्रि, श्री, म ।

४ = डक, ड़क, डका, णक, णक़, णक, णकं, **डक** (ड़े),

ॐ, ॐ. फं, पु।

५ = तृ, तृ, तृ, नृ, ह, नृ ।

६ = फ, फँ, फ्रि, छ, अ, पु, व्या, पल ।

७ =ग्र, ग्रा, ग्री, ग्भ्री, ग्री, भ्र।

८ = हा, हं, हि, द्र ।

੧ = ਓ, ਓ, ਓ, ਓ, ਓ, ਅ, ਨੂੰ।

१० = ल, लं, लः, णट, डा, अ, पर्ता ।

२० =थ, था, थं, थ्री, घ, घं, प्व, व।

३० = ल, ला, लं, ली।

४० =प्त, प्त, प्ता प्ता, प्न ।

$40 = 6, 6, 6, 6, 0$ मू।

६० = चु, वु, घु, थु, र्यु, यू, र्यू, घं, घु, घु।

७० = च, ज, य, र्, घ, म् ।

$\omega = \{ \emptyset, \omega, \omega, 0 \}$ \emptyset

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_5 \oplus \mathfrak{g}_6 \oplus \mathfrak{g}_7 \oplus \mathfrak{g}_8 \oplus \mathfrak{g}_9 \oplus \mathfrak{g}_{10} \oplus \mathfrak{g}_{11} \oplus \mathfrak{g}_{12} \oplus \mathfrak{g}_{13} \oplus \mathfrak{g}_{14} \oplus \mathfrak{g}_{15} \oplus \mathfrak{g}_{16} \oplus \mathfrak{g}_{17} \oplus \mathfrak{g}_{18} \oplus \mathfrak{g}_{19} \oplus \mathfrak{g}_{20} \oplus \mathfrak{g}_{21} \oplus \mathfrak{g}_{22} \oplus \mathfrak{g}_{23} \oplus \mathfrak{g}_{24} \oplus \mathfrak{g}_{25} \oplus \mathfrak{g}_{26} \oplus \mathfrak{g}_{27} \oplus \mathfrak{g}_{28} \oplus \mathfrak{g}_{29} \oplus \mathfrak{g}_{30} \oplus \mathfrak{g}_{31} \oplus \mathfrak{g}_{32} \oplus \mathfrak{g}_{33} \oplus \mathfrak{g}_{34} \oplus \mathfrak{g}_{35} \oplus \mathfrak{g}_{36} \oplus \mathfrak{g}_{37} \oplus \mathfrak{g}_{38} \oplus \mathfrak{g}_{39} \oplus \mathfrak{g}_{40} \oplus \mathfrak{g}_{41} \oplus \mathfrak{g}_{42} \oplus \mathfrak{g}_{43} \oplus \mathfrak{g}_{44} \oplus \mathfrak{g}_{45} \oplus \mathfrak{g}_{46} \oplus \mathfrak{g}_{47} \oplus \mathfrak{g}_{48} \oplus \mathfrak{g}_{49} \oplus \mathfrak{g}_{50} \oplus \mathfrak{g}_{51} \oplus \mathfrak{g}_{52} \oplus \mathfrak{g}_{53} \oplus \mathfrak{g}_{54} \oplus \mathfrak{g}_{55} \oplus \mathfrak{g}_{56} \oplus \mathfrak{g}_{57} \oplus \mathfrak{g}_{58} \oplus \mathfrak{g}_{59} \oplus \mathfrak{g}_{60} \oplus \mathfrak{g}_{61} \oplus \mathfrak{g}_{62} \oplus \mathfrak{g}_{63} \oplus \mathfrak{g}_{64} \oplus \mathfrak{g}_{65} \oplus \mathfrak{g}_{66} \oplus \mathfrak{g}_{67} \oplus \mathfrak{g}_{68} \oplus \mathfrak{g}_{69} \oplus \mathfrak{g}_{70} \oplus \mathfrak{g}_{71} \oplus \mathfrak{g}_{72} \oplus \mathfrak{g}_{73} \oplus \mathfrak{g}_{74} \oplus \mathfrak{g}_{75} \oplus \mathfrak{g}_{76} \oplus \mathfrak{g}_{77} \oplus \mathfrak{g}_{78} \oplus \mathfrak{g}_{79} \oplus \mathfrak{g}_{80} \oplus \mathfrak{g}_{81} \oplus \mathfrak{g}_{82} \oplus \mathfrak{g}_{83} \oplus \mathfrak{g}_{84} \oplus \mathfrak{g}_{85} \oplus \mathfrak{g}_{86} \oplus \mathfrak{g}_{87} \oplus \mathfrak{g}_{88} \oplus \mathfrak{g}_{89} \oplus \mathfrak{g}_{90} \oplus \mathfrak{g}_{91} \oplus \mathfrak{g}_{92} \oplus \mathfrak{g}_{93} \oplus \mathfrak{g}_{94} \oplus \mathfrak{g}_{95} \oplus \mathfrak{g}_{96} \oplus \mathfrak{g}_{97} \oplus \mathfrak{g}_{98} \oplus \mathfrak{g}_{99}$$

१००=सु, सू, ल, अ।

२०० = मु, मू, मृ, आ, लू, घृ ।

१ आकारों के लिए सारिणियाँ देखिए।

^२ देखिए ओझा, भारतीय प्राचीन लिपिमाला, पृ० १०७ आदि।

^१ यह उपद्वितीय का चिह्न है।

* यह भी उपध्मानीय का चिह्न है।

३०० = स्ता, सूा, जा, सा, सु, मु सू।

४०० = सूो, स्तो, स्ता।

उपर्युक्त सूची से स्पष्ट है कि एक ही अक्षर को सूचित करने के लिए विभिन्न प्रकार के अक्षरों का प्रयोग किया गया है। यह विभिन्नता बहुधा अल्प है और जान-बूझकर की गयी है, और कदाचित् अक्षरों और साधारण अक्षरों का भेद प्रदर्शित करने के लिए है। कुछ अन्य अवस्थाओं में अन्तर बहुत अधिक है, जो (बूलर के अनुसार) प्राचीनतर चिह्नों को अशुद्ध पढ़ने के कारण अथवा भिन्न-भिन्न भाषाओं में उच्चारण-भेद होने के कारण उत्पन्न हो गया है। हस्तलिपियों के पत्राकन में, अक्षर-संख्याओं को पत्रों के हाशिए पर लिखने की प्रथा है। स्थानाभाव के कारण इन अक्षर-संख्याओं के अक्षर चीनी-पद्धति के अनुरूप एक दूसरे के नीचे लिखे रहते हैं। यही प्रथा बाबर हस्तलिपि में भी है, जो छठी शताब्दी में लिखा गया था। बाद की हस्तलिपियों में, पत्राकन में, अक्षरपल्ली और दशमलव दोनों पद्धतियों के अक्षरों का प्रयोग मिलता है। कभी कभी तो इन अक्षरों का सम्मिश्रण भी कर दिया गया है, जैसा कि निम्न उदाहरणों में है^१

३३	=	ला ३	,	१००	=	सु ० ०	,	१०२	=	सु ० २
१३१	=	मु ला १	,	१५०	=	मु ६ ०	,	२०९	=	मु ० ९

अक्षरपल्ली का प्रयोग जैन हस्तलिपियों में सोलहवीं शताब्दी तक मिलता है। उस समय के बाद दशमलव पद्धति के अक्षरों का ही प्रायः प्रयोग हुआ है। मालावार में अक्षरपल्ली से मिलती जुलती पद्धति का प्रयोग आज भी होता है।^२

^१ देखिए ओझा, भारतीय प्राचीन लिपिमाला, पृ० १०८।

^२ इस पद्धति के अक्षरांक यह हैं —

१=न, २=न, ३=न्य, ४=एक, ५=इ, ६=हा (ह),
 ७=ग्र, ८=प्र, ९=द्वे (?), १०=म, २०=ठ, ३०=ल,
 ४०=एत, ५०=व, ६०=त्र, ७०=र (रु), ८०=च,
 ९०=ण, १०००=जा।

देखिए जर्नल ऑफ दि रॉयल ऐस्ट्रानामिकल सोसायटी, १८६६, पृ० ७६०।

अन्य अक्षर पद्धतियाँ

(अ) दक्षिण भारत (मालावार और आन्ध्र), लका, ब्रह्मा और स्याम में प्राप्त कुछ हस्तलिपियों में अक-सकेत की एक अन्य पद्धति का प्रयोग मिलता है जिसमें मस्कृत वर्णमाला के १६ स्वरो और ३४ व्यंजनो से अक सूचित किये गये हैं। 'अ' स्वर से युक्त ३४ व्यंजन क्रम से १ में लेकर ३४ अको को सूचित करते हैं, 'आ' स्वर युक्त ३४ व्यंजन क्रम से ३५ में लेकर ६८ अको को सूचित करते हैं, इत्यादि।^१

(ब) लका से प्राप्त कुछ पाली हस्तलिपियों में एक अन्य पद्धति का प्रयोग है।^२ इस पद्धति में १६ स्वरयुक्त 'क' क्रमानुसार १ से लेकर १६ अको को सूचित करते हैं, १६ स्वरयुक्त 'ख' क्रमानुसार १७ से लेकर ३२ अको को सूचित करते हैं, इत्यादि। इस प्रकार क=१, का=२, कि=३, की=४, कु=५, कू=६, कृ=७, कॄ=८, कलृ=९, कलू=१०, के=११, की=१२, कै=१३, कौ=१४, क=१५, क=१६, इत्यादि।

(स) वियना इपीरिअल लाइब्रेरी में सुरक्षित एक पाली हस्तलिपि में इसी प्रकार का अन्य मकेत मिलता है जिसमें मस्कृत वर्णमाला के १२ स्वरो^३ और ३४ व्यंजनों का प्रयोग है। इस पद्धति में १२ स्वर युक्त 'क' क्रमानुसार १ में लेकर १२ अको को सूचित करते हैं, १२ स्वर 'ख' क्रमानुसार में १३ में लेकर २४ अको को सूचित करते हैं, इत्यादि।

इन पद्धतियों का प्रयोग, उत्तरी भारत में कम से कम तीसरी शताब्दी के बाद नहीं हुआ। इन का आविष्कार कदाचित् हस्तलिपियों के लिपिकारों ने किया था।

१२ शून्य का साकेतिक चिह्न

प्रारम्भिक प्रयोग

शून्य के साकेतिक चिह्न का प्रयोग पिगल (लगभग २०० ई० पू०) ने अपने छदःसूत्र नामक छद शास्त्र के ग्रंथ में किया था। उन्होंने इस प्रश्न का

^१ वर्नेल, साउथ इंडियन पैलियोग्रैफी, लंदन, १८७८, पृ० ७६।

^२ पूर्वोक्त ग्रंथ।

^३ ऋ, ॠ, लृ और लृ स्वर छोड़ दिये गये हैं।

हल दिया है कि दो वस्तुएँ 'न' स्थानों पर कितने प्रकार से स्थापित की जा सकती हैं, जबकि दोनों वस्तुओं का प्रयोग एक से अधिक बार किया जा सकता हो। पिगल द्वारा कल्पित दो वस्तुएँ लघु और गुरु मात्राएँ हैं, जो क्रमशः 'ल' और 'गु' से सूचित की गयी हैं। यह ज्ञात करने के लिए कि लघु और गुरु मात्राओं का प्रयोग करके 'न' मात्राओं वाले छंद कितने प्रकार के बन सकते हैं, पिगल ने छोटे-छोटे सूत्रों में निम्न नियम का कथन किया है

“आधा करने पर, अक २ (स्थापित करो),”^१ “१ घटाने पर, शून्य (स्थापित करो),”^२ “शून्य होने पर, २ से गुणा करो,”^३ “आधा करने पर, वर्ग करो”^४।

उपर्युक्त सूत्रों का अर्थ नीचे दी हुई गणना से स्पष्ट हो जायगा। यह गणना गायत्री छंद के लिए है जिसमें ६ मात्राएँ होती हैं।^५

अक स्थापन करने पर	अ ६		व
आधा करने पर	३	अतएव २ स्थापित करने पर	२
३ को आधा करने पर पूर्ण- मस्या नहीं मिलती अत- एव उसमें से १ घटाने पर	२	अतएव शून्य स्थापित करने पर	०
आधा करने पर	१	अतएव २ स्थापित करने पर	२
१ का अर्धीकरण न हो सकने में, १ घटाने पर	०	अतएव शून्य स्थापित करने पर	०

शून्य बचने से क्रिया समाप्त हो गयी।

^१ पिगल छंद सूत्र, श्री सोताराम द्वारा संपादित, कलकत्ता, १८-४०, ८२८।

^२ पूर्वोक्त, ८२६।

^३ पूर्वोक्त, ८३०।

^४ पूर्वोक्त, ८३१।

७ मात्राओं के लिए, निम्न क्रिया है

१ घटाने पर	६,	अतएव स्थापन	०	दूना करने पर	१२८
आधा करने पर	३,	”	२	वर्ग करने पर	६४
१ घटाने पर	२,	”	०	दूना करने पर	८
आधा करने पर	१,	”	२	वर्ग करने पर	८
१ घटाने पर	०;	”	०	१ (का) दूना करने पर	२

अतएव १२८ उत्तर है।

उपर्युक्त रथापन के बाद गणना का आरम्भ 'व' कोष्ठक के सबसे नीचेवाले अंक ० से होगा। अपने पास अंक १ की कल्पना करके, ० के स्थान में उसे दूना करो, इस प्रकार २ प्राप्त होगा। २ के स्थान में उसका वर्ग करो, इस प्रकार २^२ प्राप्त होगा। पुन ० के स्थान में उसे दूना करो, इस प्रकार २^३ प्राप्त होगा। अन्ततः २ के स्थान में उसका वर्ग करो, इस प्रकार २^४ अर्थात् ६४ प्राप्त होगा। अतः ज्ञात हुआ कि २ वस्तुओं का ६ स्थानों में स्थापन ६४ प्रकार से किया जा सकता है।

उपर्युक्त गणना में दो प्रकार की क्रियाओं, अर्थात् (१) आधा करने की क्रिया और (२) आधा न होने पर १ घटाने की क्रिया, का अन्तर बतलाने के लिए दो प्रकार के सकेतों की आवश्यकता पड़ती है। इन दो प्रकार के सकेतों के लिए किन्हीं दो अभीष्ट चिह्नों का प्रयोग किया जा सकता था। प्रश्न यह उठता है कि "पिंगल ने इन दो सकेतों के लिए '२' और '०' का ही प्रयोग क्यों किया है? सकेत '२' तो आसानी से समझाया जा सकता है, क्योंकि अर्धिकरण की क्रिया से दो का—अर्थात् दो से भाग करने का आभास होता है। हमारे सकेत 'शून्य' का प्रयोग कदाचित् इसलिए किया गया था, कि उस समय शून्य का प्रयोग 'अभाव' या 'घटाने' के अर्थ में होता था। इन दोनों अर्थों में शून्य का प्रयोग भारतीय ग्रन्थों में प्राचीन काल से मिलता है। पिंगल का उल्लेख दर्शित करता है कि हिन्दू लोगो के पास २०० ई० पू० के पूर्व शून्य का साकेतिक चिह्न था, उसका स्वरूप चाहे जो रहा हो।

वक्षाली हस्तलिपि (३०० ई०) में भी, गणना करने में, शून्य का प्रयोग किया है। उदाहरणतः, पत्र ५६ (ब) में लिखा है—

$$\begin{array}{|c|c|} \hline ८८० & ९६४ \\ \hline ८८ & १६८ \\ \hline \end{array}, \text{ गुणा करने पर मिला } \begin{array}{|c|} \hline ८४८३२० \\ \hline १४११० \\ \hline \end{array},$$

अलग रखे हुए ४० का वर्ग है $\begin{array}{|c|} \hline १६०० \\ \hline \end{array}$, इसको अग म घटाने पर मिला

$$\begin{array}{|c|} \hline ८४६७०० \\ \hline १४११२ \\ \hline \end{array}, \text{ अपवर्तन करने पर मिला } \begin{array}{|c|} \hline ६० \\ \hline \end{array}।"$$

'उदाहरणार्थ', पृथ्वकस्वामी ने 'व' (=वर्ग) और 'गु' (=गुण) का प्रयोग किया है, तथा महावीर ने ६ और ० अंकों का प्रयोग किया है। आगे देखिए।

उक्त ग्रंथ में इस प्रकार के अनेक उदाहरण हैं। इन उदाहरणों को देखने पर विदित होगा कि यदि उनमें से एक निकाल लिये जायें तो प्रयुक्त वाक्य निरर्थक हो जायेंगे। अतएव ग्रंथ की मूल रचना के समय ही उन अकों का समावेश किया गया होगा। इसमें सन्देह नहीं कि वे वाद के प्रक्षेप नहीं हैं। शून्य का स्पष्ट उल्लेख तथा उसका गणना में प्रयोग दिखाने के लिए हम उन्हीं ग्रंथ में निम्नलिखित अंश उद्धृत करते हैं

“	०	२	३	४	दृश्य	२००	”	‘शून्य में १ जोड़ कर’
	१	१	१	१		१		

(मूल का प्रयोग करने पर) प्राप्त हुआ १ । २ । ३ । ४ । ”

पञ्च-सिद्धान्तिका (ल० ५५० ई०) में कई स्थानों पर शून्य का उल्लेख है। एक उदाहरण यह है

“मेष राशि (के सात ज्योतिष) में (प्रत्येक में) ७ और अन्तिम (आठवें ज्योतिष) में ६, वृषराशि (के आठ ज्योतिष) में क्रमशः ६, ६, ६, ५, ५, ५, ४ और ४, और मिथुन राशि (के आठ ज्योतिष) में क्रमशः ३, ३, २, २, १, १, ०, ० कलाएँ होती हैं।”

यहाँ पर शून्य को उन्हीं प्रकार का एक कल्पित किया गया है जैसे १, २, ३, इत्यादि होते हैं। यदि इसका कोई अन्य अर्थ किया जायगा तो मग्न न होगा। उक्त ग्रंथ में छन्द-रचना की सुविधा के लिए समस्याओं को पकड़ बरने में शून्य को जोड़ने और घटाने का भी प्रयोग किया गया है। उदाहरणतः

‘हस्तलिपि में शून्यों के स्थान में बिन्दुओं () का प्रयोग किया गया है। आधुनिक प्रणाली के अनुसार इसको इस प्रकार लिखेंगे—

$$य + २य + ३य + ४य = २००।$$

‘मूल में ‘युत’ शब्द का प्रयोग किया गया है।

‘वक्षाली हस्तलिपि, पत्र २२ (ब) ।

‘पञ्च-सिद्धान्तिका, ४, १२।

“२, ३, ९, १२, ९, ३ और ० को (अलग अलग) ३६ में जोड़ने पर दिन प्राप्त होते हैं।”

इस प्रकार के उदाहरण, सब के सब, पञ्चसिद्धान्तिका उन्ही भागों में मिलने हैं जो पुलिग-सिद्धान्त से सम्बन्ध रखते हैं। इसमें यह प्रतीत होता है कि ऐसे वाक्य पुलिग-सिद्धान्त के ही उद्धरण हैं। अतएव बिना किसी कठिनाई के यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि आचार्य पुलिग शून्य के अकात्मक मान में अवगत थे। यह तो बतलाया ही जा चुका है कि उन्होंने शब्दांशों का प्रयोग किया था।

बराहमिहिर के समकालीन लेखक जिनभद्र गणि (५२९-५८९) की रचनाओं में शून्य के अकात्मक प्रयोग के निर्णयात्मक प्रमाण मिलते हैं। शून्य-गणित बड़ी-बड़ी समस्याओं का वर्णन करने में, लाघव की दृष्टि में, उन्होंने पाया यह बतलाया कि उन समस्याओं में शून्य की पुनरावृत्ति कितने बार हुई है। उदाहरणतः, उन्होंने २,२,४,४०,००,००,००० को इस प्रकार लिखा है—‘बार्डिम, चवालीस आठ शून्य’, और ३२,००,४०,००,००,००० को इस प्रकार—‘बन्नीस दो शून्य चार आठ शून्य’। उसी ग्रंथ में अन्य स्थान पर

$$२८१९६० \frac{४०७१५०}{४८३९२०} = २४१९६० \frac{४०७१५}{४८३९२}$$

का वर्णन इस प्रकार है—

“दो लाख इकनालीस हजार नौ सौ साठ, शून्य में अपवर्तन करने पर अश है चार-शून्य-मान-एक-पाँच और ढर है चार-आठ-तीन-नौ-दो।”

यह ध्यान देने की बात है कि ‘अपवर्तन’ शब्द का तात्पर्य वही है जो आजकल की अकगणित में ‘किमी भिन्न को, उसके अंश और ढर को उभयनिष्ठ गुणनखंड

‘पञ्च-सिद्धान्तिका, अध्याय १८, श्लोक ३५, इस प्रकार के अन्य उदाहरण निम्नलिखित स्थलों पर भी हैं ३ १७, ४ ७, ४ ८, ४ ११, १८ ४४, १८ ४५, १८ ४८, १८ ५१।

^१ बृहत्-सूत्र-ममाम, मलयगिरि कृत टीका के साथ संपादित, बंबई, १९६६।

^२ पूर्वोक्त ग्रंथ, १ ७१। अन्य उदाहरण इन स्थलों पर हैं—१ ६०, ६७, १०२, १०८, ११३, ११६, इत्यादि।

^३ पूर्वोक्त ग्रंथ, १ ८३।

में भाग देकर मक्षिप्त रूप में परिणत करने का' होता है। अतएव जिनभद्र गणि का शून्य, अभाव-पदशंक भावना मात्र नहीं है बल्कि निस्मदेह उससे तात्पर्य गणित के अक-मूचक चिह्न से है।

जिनभद्र गणि के समकालीन सिद्धसेन गणि ने उमास्वातिकृत तत्त्वार्यधिगम-सूत्र पर अपनी टीका में, गणित करने में, शून्य का प्रयोग किया है जो कि निम्न-लिखित दो आदर्श उदाहरणों में प्रमाणित होता है^१

“ गेष है ३५,३४,४०,००,००,०००। इसका वर्ग निकालते हैं जाठ शून्यों के आधे ४ शून्य होते हैं, गेष का वर्गमूल है १८८, अतएव इष्ट वर्गमूल हुआ १८,८०,००००।”

“चार शून्यों को हटाने पर, उसके बाद लब्धि मिलती है १,००,०००।”

भास्कर प्रथम (६२९ ई०) ने अपनी महाभास्करीय में शून्य को घटाने की चर्चा की है। अपने आर्यभटीय-भाष्य में उन्होंने स्थान-मान युक्त अंकों का, शून्य के साथ, प्रयोग किया है। जैसा बताया जा चुका है, उन्होंने अंक स्थानों को सूचित करने के लिए भी शून्यों का प्रयोग किया है।

अकगणित और बीजगणित के सभी उपलब्ध भारतीय ग्रन्थों में एक प्रकरण शून्य के परिकर्मों में सम्बन्ध रखता है, जिसमें मूल और घात की क्रियाएँ सम्मिलित रहती हैं। इन परिकर्मों का विस्तृत वर्णन आगे किया जायगा, परन्तु यहाँ पर इस बात की ओर संकेत किया जा सकता है कि शून्य के गणितात्मक परिवर्तन तभी संभव हो सकते हैं जब साकेतिक चिह्न के द्वारा प्रदर्शित अंक के रूप में शून्य का अस्तित्व पहले से ही स्वीकार कर लिया जाय।^२

^१ उमास्वाति-कृत तत्त्वार्यधिगम सूत्र, स्वयंकृत टीका युक्त, सिद्धसेन-गणि की व्याख्या सहित, एच आर कापडिया द्वारा संपादित, बम्बई १९२६, पृ० ११ (व्याख्या)।

^२ स्मिथ और कार्पेस्की (हिन्दू अरेबिक न्यूमरल, पृ० ५३) लिखते हैं “महावीराचार्य के गणित-सार-संग्रह में, जबकि यह ग्रंथ स्थान-मान वाले अंकों का प्रयोग नहीं करता, इसी प्रकार का शून्य-सम्बन्धी विवेचन है।” इस कथन का पहला भाग अशुद्ध है, क्योंकि महावीर ने हमेशा स्थान-मान वाले अंकों का प्रयोग किया है। वस्तुतः गणित-सार-संग्रह में स्थान-मान से रहित अंकों का चिह्न भी नहीं मिलता। जे० ट्रांके का कथन (गैसिट्टे डेर एलीमेंटरी मैथे-

शून्य का आकार

प्राचीन ग्रंथों के उपर्युक्त उद्धरण निर्णयात्मक रूप में प्रमाणित करते हैं कि ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों से शून्य की गणना अको में की जाती थी और उसे सूचित करने का एक साकेतिक चिह्न भी था। इस साकेतिक चिह्न का आकार क्या था, सन्देहात्मक है। वक्षाली हस्तलिपि में शून्य के लिए बिंदु का प्रयोग किया गया है, परन्तु इस ग्रंथ की उपलब्ध प्रति आठवीं या नवीं शताब्दी की है, अतएव यह नहीं कहा जा सकता कि उक्त आकार वही है जो वक्षाली हस्तलिपि की मूल रचना के समय (अर्थात् तीसरी शताब्दी या पहले) प्रयोग किया जाता था। शून्य-बिंदुओं का उल्लेख महाकवि मुचन्धु की रचनाओं में भी मिलता है। उनके वासवदत्ता नामक काव्य में एक स्थान पर तारों की उपमा शून्य बिंदुओं से दी गयी है—

“निमीलित होते हुए नीलकमल के व्याज से रचे हुए अजलिपुट के द्वारा, उदय होते हुए चन्द्रमा को नमस्कार सा करते हुए अन्वकार का आगमन हुआ। उसी समय गगन-रूपी महासर में कुमुदों के समूह का सन्देह उत्पन्न करनेवाले तारे प्रकाशित हुए, मानों विश्व की गणना करते हुए ब्रह्मा ने शशि-रूपी खड्गों के टुकड़े से आकाशरूपी काले अजित पर, ससार के अत्यन्त शून्य होने के कारण, शून्य-बिंदुओं को लिख दिया हो।”^१

शून्यसूचक बिंदु का त्याग कर दिये जाने के बहुत समय बाद भी जब शून्य के अर्थ में सामान्य रूप से लघुवृत्त का प्रयोग होता था, शब्दों में तथा वाद के साहित्य में शून्य के लिए बिंदु शब्द का प्रयोग किया जाता था। अतएव

मेट्रिक, जिल्द २, १६२६, पृ० ५६) कि १७वीं शताब्दी के पूर्व शून्य की गणना अको में नहीं की जाती थी, अशुद्ध है। देखिए बी० दत्त, “अर्ली लिटरेरी एवीडेन्स ऑफ़ दि यूस ऑफ़ दी जोरो इन इंडिया”, अमेरिकन मैथेमेटिकल सोसली, ३८, १९३१, पृ० ५६६।

^१ मुचन्धुकृत वासवदत्ता, एफ० हॉल द्वारा संपादित (कलकत्ता, १८५६, पृ० १८२) और लुई एच० ग्रे द्वारा अंगरेजी में अनुवादित (न्यूयार्क, १९१३, पृ० ६६ आदि)।

^२ उदाहरणतः, हिन्दी के कवि विहारी लिखते हैं

कहत सबें बेंदी दिये, आंक दस गुनो होत।

तिय लिलार बेंदी दिये, अगनित बढ़त उदोत ॥ (विहारी सतमई, दोहा ४१)

शून्य के प्रयोग का प्राचीनतम पुरालेख-सम्बन्धी प्रमाण आठवीं शताब्दी के जयवर्द्धन द्वितीय के रघोली पट्टो^१ में मिलता है। भोजदेव^२ के शासनकाल में लिखे गये ग्वालियर के अन्तर्लेखों में भी शून्य का प्रयोग किया गया है। इन अन्तर्लेखों में शून्य का आकार लघुवृत्त है। यही आकार बहुत प्राचीन समय में, कदाचित् आठवीं शताब्दी के पूर्व से, सामान्य रूप से प्रचलित है।

भारतवर्ष में आधुनिक पाठशाला के विद्यार्थी को इकाई, दहाई, सैकड़ा इत्यादि अक स्थानों के नाम सिखाये जाते हैं और उन स्थानों को पक्तिवद्ध शून्यों के द्वारा सूचित करने को कहा जाता है। ये शून्य निम्न प्रकार से लिखे जाते हैं

• 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

“स्थानों का लेखन (करने पर मिलता है)

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○¹¹

'पीछे दो हई सूची में न० ४।

¹ पोछे दी हुई सूची में न० १६ और २०।

तक देखने को मिलता है। वक्षाली हस्तलिपि में अज्ञात राशि के स्थान में शून्य का स्थापन किया गया है। बीजगणित में तो अज्ञात राशि के लिए मदैव में अक्षरो का प्रयोग हुआ है। प्रतीत होता है कि अकगणित में अज्ञात राशि के स्थान में शून्य का प्रयोग वस्तुतः राशि के अभाव को सूचित करने के लिए किया जाता था, बीजगणित के बीज 'य' (y) की भाँति वह शून्य साकेतिक चिह्न न था, क्योंकि उसका प्रयोग केवल प्रश्न के न्यास में ही किया गया है, बीजगणित के मकेतो की भाँति गणना में नहीं। शून्य का यह प्रयोग अविकतर पञ्चराशिक, सप्तराशिक आदि अनुपात के प्रश्नों में ही मिलता है। अरबवालों ने भी हिन्दुओं के प्रभाव के कारण ऐसे ही प्रश्नों में अज्ञातराशि को सूचित करने के लिए शून्य का प्रयोग किया है। अज्ञातराशि को सूचित करने के लिए शून्य का इसी प्रकार का प्रयोग यूरोप में गांटफ्रिड बोलक के कुछ व्याख्यानो की लेटिन हस्तलिपि में मिला है। ये व्याख्यान एर्फुर्ट विश्वविद्यालय में १४६७-६८ में दिये गये थे।^१

भास्कर प्रथम ने ऋण चिह्न को सूचित करने के लिए भी शून्य का प्रयोग किया है। उदाहरणतः, उन्होंने अपने आर्यभटीय-भाष्य में $\frac{१}{२} - \frac{१}{६}$ को निम्न प्रकार से लिखा है

$$\left| \begin{array}{cc} १ & १ \\ २ & ६ \end{array} \right| ^3$$

वाद के लेखको ने अक के ऊपर बिन्दु रखकर अक के ऋणत्व को सूचित किया है। ऐसी परिस्थिति में 'लघुवृत्त' या 'बिन्दु' घनत्व के अभाव को प्रदर्शित करता है। बिन्दु का ऐसा ही प्रयोग अरब और यूरोप में भी देखने को मिलता है, जिसका कारण स्पष्टतया हिन्दू प्रभाव है।^२

^१ स्मिथ और कार्पिस्को, पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ० ५३-५४।

^२ आर्यभटीय-भाष्य, अध्याय २, श्लोक २७ (11)।

^३ कला (या विकला) का अभाव प्रदर्शन करने के लिए, अलबटानी द्वारा अरबी ऋण चिह्न 'ला' का प्रयोग, जिसका उल्लेख नलिनो (फेरहाण्ड-लुगेन डेस ५ काप्रेसेज डेर ओरियंटलिस्टेन, बर्लिन, १८८२, जिल्द २, पृ० २७१) ने किया है, भारतीय ऋण-चिह्न, बिन्दु के हो सद्दृश है।

१३ भारतीय साहित्य में स्थान-मान संकेत

जैन आगम ग्रंथ

'अकस्थान' शब्द के प्रयोग का प्राचीनतम साहित्यिक प्रमाण अनुयोग-द्वार-सूत्र^१ नामक जैन ग्रंथ में मिलता है, जो ईसवी मनु के पहले का लिखा हुआ है। इस ग्रंथ में ममार के समस्त जीवों की मर्या इस प्रकार बतलायी गयी है "(लोक के जीवों की मर्या) कोटि-कोटि आदि मन्त्राओं की सहायता में अकों में व्यक्त करने पर २९ स्थान लेती है।" 'अकस्थानों' का उल्लेख तत्सामयिक ग्रंथ व्यवहार सूत्र^२ में भी आया है।

पुराण

पुराणों में भी, जो अशत धार्मिक और अशत ऐतिहासिक ग्रंथ हैं, अकस्थान और स्थान-मान सिद्धान्त के उल्लेख आये हैं। इन ग्रंथों के निर्माण का उद्देश्य जनसाधारण में धार्मिक और ऐतिहासिक बातों के ज्ञान का प्रसार करना था। इन ग्रंथों में स्थान-मान सिद्धान्त के उल्लेख मिलने से सिद्ध होता है कि उनके लेखकगण इस पद्धति को महत्त्व देना चाहते थे।

वायु-पुराण^३ में अकस्थानों का निम्न उल्लेख है

"ये गणित के अठारह स्थान हैं। महर्षियों का कथन है कि इस प्रकार स्थानों की मर्या सैकड़ों हो सकती है।"

अग्नि-पुराण^४ में स्थान-मान सिद्धान्त का निम्न वर्णन है

"इकाई से आरम्भ करके, प्रत्येक स्थान का मान पूर्वगामी स्थान में दस गुना होता है।"

^१ इस अवतरण का विस्तारपूर्वक उद्धरण किया जा चुका है। पीछे देखिए, पृ० १२।

^२ अध्याय १, देखिए वी० दत्त, सियमिया जुलाई, १९३१, पृ० ८।

^३ अध्याय १०१, श्लोक १०२ आदि।

एवमष्टादशतानि स्थानानि गणनाविधां ॥ १०२ (११)

शतानीति जानीयात्संज्ञितानि महर्षिनि । १०३ (१)

^४ अग्निपुराण में स्थान-मान सिद्धान्त के अनुसार शब्दों का भी प्रयोग मिलता है। देखिए पीछे, पृ० ५४।

विष्णु-पुराण^१ में भी इसी प्रकार का स्थान-मान मिद्धान्त का वर्णन है

“हे द्विज ! एक स्थान में दूसरे स्थान का मान कमश दम गुना होता है ।
अठारहवाँ स्थान परार्थ कहलाता है ।”

ऊपर उद्धृत किये गये तीन पुराण सबसे प्राचीन पुराण हैं । अग्नि और वायु पुराण, अपने आधुनिक रूप में, चौथी शताब्दी के आम-पाम के हैं । वायु पुराण तो कुछ विद्वानों के मत में प्रथम या दूसरी शताब्दी का है ।

दार्शनिक ग्रंथ

शान्तरक्षित-कृत तत्त्वमग्रह के टीकाकार कमलशील (छठी शताब्दी) ने वसुमित्र के निम्नलिखित दृष्टान्त को उद्धृत किया है^२

“जिस प्रकार मिट्टी की गोली इकाई के स्थान में होने पर १ को सूचित करती है (दहाई के स्थान में होने पर १० को), मैकटे के स्थान में होने पर १०० को, और हजार के स्थान में होने पर १००० को, उसी प्रकार ।”

वसुमित्र का समय १०० ईसवी माना जाता है । अतएव उपर्युक्त उद्धरण निश्चित रूप से सिद्ध करता है कि स्थान-मान का मिद्धान्त पहली शताब्दी ईसवी के अत तक इतना प्रसिद्ध हो चुका था कि दार्शनिक ग्रंथों में दृष्टान्त के रूप से इसका प्रयोग किया जाने लगा था ।

उपर्युक्त दृष्टान्त बाद के दार्शनिक ग्रंथों में भी मिलता है । उदाहरणार्थ, पतञ्जलि-कृत योगसूत्र के व्यास-भाष्य^३ में यह निम्नलिखित शब्दों में दिया गया है

“जिस प्रकार एक ही रेखा मैकटे के स्थान में होने पर सौ, दहाई के स्थान में होने पर दस, और इकाई के स्थान में होने पर एक कहलाती है ।”^४
यही दृष्टान्त शंकराचार्य के शांतिरक-भाष्य में इस प्रकार है

^१ अश ६, अध्याय ३, श्लोक ४ ।

^२ तत्त्वमग्रह (श्लो० १७८७-१७९०) पर कमलशील की टीका देखिए ।

^३ पाद ३, सूत्र १३ का भाष्य ।

^४ जे० एच० वुड्स ने (दि योग सिस्टम ऑव पतञ्जलि, पृ० २१६ फुट-नोट) कुछ अवतरणों के सम्बन्ध में, जिनमें यह भी सम्मिलित है, लिखा है “मिस्टर जी० आर० के की सम्मति के विपरीत, निम्नलिखित अवतरण प्रदर्शित करते हैं कि दशमलव स्थान-मान मिद्धान्त छठी शताब्दी ई० में ज्ञात था ।” ऊपर दिये हुए अवतरण को सर पी० सी० रे ने भी उद्धृत किया है । देखिए हिस्ट्री ऑव हिन्दू केमिस्ट्री, जिन्द २, पृ० ११७ ।

“जैसे, यद्यपि रेखा एक ही है तो भी स्थान-भेद के कारण उसका मान एक, द्म, हजार इत्यादि हो सकता है।”^१

उपर्युक्त दो ग्रंथों में से पहला अधिक से अधिक छठी शताब्दी का है और दूसरा अधिक से अधिक आठवीं शताब्दी का है।

साहित्यिक ग्रंथ

मुबन्धु कृत वामवदत्ता के अवतरण का जिसमें तारों की उपमा शून्य-विन्दुओं में दी गयी है, उल्लेख किया जा चुका है। बाद के साहित्य में शून्य के प्रयोग के अनेक उदाहरण मिलते हैं, परन्तु उन्हें यहाँ देने की आवश्यकता नहीं है।

१४ स्थान-मान सिद्धान्त के आविष्कार का समय ^२

अब हम स्थान-मान संकेत के प्रारम्भिक प्रयोग में संभव रखनेवाले विभिन्न प्रमाणों का माराग दे रहे हैं

(१) स्थान-मान पद्धति के प्रयोग का पुरालेख सम्बन्धी प्राचीनतम प्रमाण छठी शताब्दी के अन्त का है।

(२) गण्डाको के माथ स्थान-मान सिद्धान्त का प्राचीनतम प्रयोग तीसरी या चौथी शताब्दी का है। ऐसा प्रयोग अग्नि-पुराण, वक्षाली हस्तलिपि और पुलिग-सिद्धान्त में मिलता है।

(३) गणित के ग्रंथ में स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग सर्वप्रथम वक्षाली-हस्तलिपि में हुआ है जिसमें मर्यादों को लिखने में इसका प्रयोग किया गया है। स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग आर्यभटीय में तथा बाद के सब ग्रंथों में हुआ है।

(४) साहित्य में स्थान-मान सिद्धान्त का उल्लेख १०० ई० पू० में हुआ है। तीन उल्लेख तो पुराणों में मिलते हैं जो तीसरी से चौथी शताब्दी तक के लिखे हुए हैं, और तीन उल्लेख दार्शनिक ग्रंथों में मिलते हैं जिनमें से एक लगभग १०० ई० वा है।

(५) शून्य के सांकेतिक चिह्न का प्रयोग पिगल के छन्द सूत्र में मिलता है जो २०० ई० पू० के लगभग लिखा गया था।

^१ = ३ १७, देखिए बी० दत्त, अमेरिकन मथेमेटिकल सोसैटी, ३३, १९२६, पृ० २२०-१।

^२ उदाहरणतः, श्रीहर्षकृत नैषधचरित (लगभग १२वीं शताब्दी) में शून्य-विन्दु का प्रयोग आया है। देखिए बी० दत्त, पूर्वोक्त, पृ० ८४६-४४८।

उपर्युक्त तथ्यों में स्पष्ट है कि स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग साहित्यिक और गणिनेतर ग्रंथों में, गणित के ग्रंथों की अपेक्षा, बहुत पहले हुआ। ठीक यही आशा भी की जा सकती है। क्योंकि इस सिद्धान्त के आविष्कार होने के बाद कुछ समय तक इसका प्रयोग केवल बड़ी-बड़ी गणनाएँ लिखने में किया गया होगा। उसके बाद बहुत समय, ऐसी समस्याओं द्वारा गणित की क्रियाएँ करने के नियमों को बनाने में लगा होगा। सिद्धान्त के पूर्णतया विकसित हो जाने पर ही गणित के ग्रंथों में इसके प्रयोग की आशा की जा सकती है। अतएव गणिनेतर ग्रंथों में मिलनेवाले इस सिद्धान्त के प्रयोग के प्रमाण, गणित के ग्रंथों की अपेक्षा प्राचीन होने ही चाहिए।

गणित के ग्रंथ इतने टिकाऊ नहीं होते जितने धार्मिक या साहित्यिक ग्रंथ। ज्यों ही इस विषय का उत्तमतर ग्रंथ क्षेत्र में आ जाता है, पुराने ग्रंथ का अध्ययन रोक दिया जाता है। वस्तुतः गणित के नये ग्रंथ का निर्माण इसी उद्देश्य में होता है कि वह पुराने ग्रंथ की खराबियों को दूर करके उसका स्थान ग्रहण कर ले। सम्भव है कि आर्यभट्ट प्रथम के पहले ऐसे ग्रंथ रहे हों जिनमें स्थान-मान सिद्धान्त का प्रयोग हुआ हो, परन्तु उनका त्याग कर दिया गया और अब वे अप्राप्य हैं। १६०० वर्ष व्यतीत हो जाने के बाद अब ऐसे ग्रंथों की प्रतियों को प्राप्त करने की आशा करना व्यर्थ है।

यूरोप और अरब में ऐसे ग्रंथों की हस्तलिखित प्रतियाँ प्राप्त करना आज भी संभव है जिनमें प्राचीन अकों का प्रयोग या प्राचीन और नवीन अकों का मिला हुआ प्रयोग किया गया था, परन्तु भारतवर्ष में ऐसे ग्रंथों का लेशमात्र भी चिह्न नहीं मिलता।

यूरोप में स्थान-मान सिद्धान्त के प्रयोग के निश्चित प्रमाण सर्वप्रथम दसवीं और ग्यारहवीं शताब्दियों में मिलते हैं, परन्तु दशमलव अकों का सामान्य प्रयोग वहाँ सत्रहवीं शताब्दी में ही हुआ। भारतवर्ष में तो आर्यभट्ट प्रथम (४९९ ई०), भास्कर प्रथम (६२९ ई०), ब्रह्मगुप्त (६२८ ई०), और लल्ल (८वीं शताब्दी) सभी ने दशमलव अकों का ही प्रयोग किया है। उनके ग्रंथों में किसी अन्य संकेतों का चिह्न भी नहीं मिलता। यूरोप के दृष्टान्त को लेकर, केवल हिन्दू-गणितीय ग्रंथों द्वारा प्रस्तुत प्रमाणों के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि स्थान-मान सिद्धान्त भारतवर्ष में लगभग २०० ई० पू० में ज्ञात रहा होगा।

क्योंकि साहित्यिक प्रमाण भी हमें उसी काल में ले जाते हैं, इसलिए हम निश्चयपूर्वक कह सकते हैं कि स्थान-मान सिद्धान्त २०० ई० पू० के लगभग भारतवर्ष में ज्ञात था। अतएव यदि हम दशमलव स्थान-मान संकेत और शून्य के कोई

आविष्कार होने का समय २०० ई०पू० निर्धारित करे, तो अधिक अशुद्धि न होगी। सम्भव है कि आगे चलकर कोई ऐसा प्रमाण मिल जाय कि हमें वाध्य होकर इससे-
वं का समय निर्धारित करना पड़े।

१५ अरब में हिन्दू अक

अरब लोगो का क्रमबद्ध इतिहास ६२० ई० से आरम्भ होता है जब मोहम्मद साहब मक्का से मदीना को गये थे। इस्लाम धर्म के फैलते ही अरब प्रायद्वीप की विविधो हुई जातियाँ एक हो गयी और परिणामस्वरूप एक शक्तिशाली राष्ट्र का प्रादु-
र्भाव हुआ। कुछ ही काल में इन संगठित अरबो ने उत्तरी अफ्रीका और स्पेन प्राय
द्वीप के समस्त भाग पर विजय प्राप्त की और पूर्व की ओर भारतवर्ष की पश्चिमी
सीमा पर्यन्त अपने राज्य का विस्तार किया। अनायास ही उन्होंने वजारो की
तरह घूमना बन्द कर दिया, और उच्चकोटि की सम्यता को ग्रहण किया।

अरब साहित्य और विज्ञान की नींव ७५० ई० और ८५० ई० के बीच में
डाली गयी। यह कार्य विजेयत विदेगी सामग्री और विदेगी लोगो की सहायता
में हुआ। उनके वर्णिक साहित्य का अधिकांश फारसी से अनुवाद के रूप में आया।
रणविद्या, शस्त्रास्त्र-विद्या, पशुचिकित्सा-शास्त्र, श्येनपालन विद्या, तथा विविध
प्रकार के गकुन-ग्रन्थ एवं आयुर्वेद-शास्त्र की कुछ पुस्तके संस्कृत और
फारसी में अनूदिन हुई। यथार्थ विज्ञान उन लोगो को यूनान और भारतवर्ष
में मिले।

मोहम्मद साहब के समय में पूर्व अरबवालो के पास मतोपजनक अक सकेत
न थे। परन्तु विजित देशो के आर्थिक शासन से सवध रखनेवाली अनेक गणनाओ
ने विकसित अक सकेत के प्रयोग को अनिवार्य बना दिया। कुछ स्थानो में अधिक
समय विजित जातियो क अको का भी कुछ काल तक प्रयोग हुआ। इस प्रकार
मॉरिया में यूनानी अक सकेत और मिस्र में काप्टिक अक सकेत का प्रयोग यथावत्
स्थापित रक्खा गया। खलीफा वालिद (६९९ ई०) की राजकीय घोषणा जिकके
अनुसार राजकाज में यूनानी भाषा का प्रयोग करना मना किया गया था, परन्तु
अरबी भाषा में अपने अक न होने के कारण अको को सूचित करने के लिए यूनानी

विस्तृत विवरण के लिए खजोरी-कृत हिन्दी अँव मैथिलेय और
स्मिथ और कापित्सी कृत हिन्दू-अरेबिक न्यूमरल्स देखिए।

अक्षरो के प्रयोग का विशेष रूप में अपवाद किया गया था। इसी प्रारम्भिक काल से सवध रखती है।^१ धीरे-धीरे करके अक्षर मकेत में अरबी अक्षरो ने यूनानी अक्षरो का स्थान ग्रहण कर लिया और इस प्रकार अवजद-मकेत का प्रादुर्भाव हुआ। कदाचित् अरब लोगो को भारतीय अंको का ज्ञान मेसोस्त-जैसे विद्वानो की रचनाओ से एव प्राचीन गोवार सकेतो का ज्ञान अन्य सूत्रो में हुआ हो। परन्तु चूँकि उनके सवाददाता सब आवश्यक सूचना नहीं दे सके (उदाहरणतः, अकगणित में परिकर्मों की क्रिया उन्हें विदित न थी), अतएव उन अंको के गणित में प्रयोग होते होते लगभग एक शताब्दी और बीत गई।

खलीफा अलमसूर (७५३-७७४ ई०) के राज्य-काल के समय में मिन्य में बगदाद को कुछ दूत गये थे, जिनमें कुछ विद्वान भी थे जो अपने साथ गणित के कई ग्रंथ, जिनमें ब्रह्मगुप्त रचित ब्राह्म स्फुट सिद्धान्त एव खण्डखायक भी सम्मिलित थे, ले गये थे। इन विद्वानो की महायता से अलफजारी ने और कदाचित् याकूब इब्न तारिक ने भी, उनका अरबी में अनवाद किया था। दोनों ही ग्रंथों का खूब प्रयोग किया गया और अरबी गणित पर उनका विशेष प्रभाव पड़ा। यही अवसर था जब अरब लोग पहले पहल वैज्ञानिक प्रणाली की ज्योतिष के सम्पर्क में आये। इस विषय के सभी विद्वान लेखको का विचार है कि ठीक इसी समय हिन्दू अंको का अरब में निश्चित रूप से प्रवेश हुआ। मालूम होता है कि प्रारम्भ में अरब लोगो ने गोवार अंको का प्रयुक्त किया जिनको उन्होंने पहले में ही अलेक्जेंड्रिया के निवासियों में प्राप्त किया था (परन्तु इनमें शून्य सम्मिलित न था) अथवा उन सीरिया निवासियों से प्राप्त किया था जो बगदाद के खलीफा लोको के यहाँ अनुवाद का काम करते थे। अलख्वारिज्मी (८२५ ई०) ने, जो कि अकगणित के प्रारम्भिक अरब लेखको में से था, गोवार अंको का ही प्रयोग किया।^२ परन्तु अधिक समय व्यतीत होने के पहले ही अरब लोगो ने यह अनुभव किया कि गोवार अंक दाहिनी ओर से बायी ओर को लिखी जानेवाली उनकी लिपि के अनुकूल नहीं है। प्रतीत होता है कि उसके बाद अधिक अनुकूल पड़नेवाले अंको का प्रयोग करने का प्रयत्न किया गया।

^१ देखिए थियोफेस (७५८-८१८ ई०) कृत क्रोनोग्रेफिया, स्विप्टोरेम हिस्टोरिये वैजन्टाइने, जिल्द ३६, बोलाने, १८३६, पृ० ५७५, स्मिथ कार्पिस्को द्वारा पूर्वोक्त ग्रंथ में पृ० ६४ की टिप्पणी में उद्धृत।

^२ स्मिथ और कार्पिस्को, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ६८।

परन्तु चूँकि लोग गोवार अको के प्रयोग में अभ्यस्त हो चुके थे, अतएव उनका परित्याग करना उन्हें अवरता था। परिणाम-स्वरूप गोवार अको और नवीन अको के बीच एक झगडा-ना^१ उठ खड़ा हुआ जो लगभग दो (१०वीं और ११वीं) शताब्दियों तक चलता रहा, जब तक कि अधिक अनुकूल पड़नेवाले एक सामान्य प्रयोग में न आ गये। फिर भी पश्चिम अरब के निवासियों ने सशोधित अको के प्रयोग को स्वीकार नहीं किया और गोवार अको का ही प्रयोग यथावत् स्थापित रखा, और इस प्रकार वे गोवार अको को जाग्रत यूरोप में प्रवेश कराने में समर्थ हो सके। आधुनिक अरबी अको तथा आधुनिक यूरोपीय अको के आकार-भेद का कारण अब तक उपस्थित किये गये अन्य सिद्धान्तों की अपेक्षा उपर्युक्त सांटीकरण से अधिक अच्छी तरह समझ में आता है।

वेपके महोदय द्वारा प्रस्तुत किये गये सिद्धान्त में उपर्युक्त आकार वैषम्य को समझाने के लिए निम्नलिखित कल्पनाएँ की गयी हैं

(१) ईसा की दूसरी शताब्दी में, जब शून्य का आविष्कार नहीं हुआ था, भारतीय एक अलेक्जेंड्रिया को लाये गये थे और वहाँ से उनका रोम और पश्चिमी अफ्रीका में प्रसार हुआ था।

(२) आठवीं शताब्दी में जब शून्य के आविष्कार के कारण भारतीय एक पकेत अत्यन्त परिष्कृत और उन्नत हो चुके थे बगदाद के अरबों ने उन्हें हिन्दुओं से प्राप्त किया था।

(३) पश्चिमी अरब के निवासियों ने शून्य को पूर्वी अरबों ने प्राप्त किया, परन्तु उन्होंने अपने प्राचीन अको के प्रयोग को ज्यों का त्यों स्थापित रखा, जिसका

^१ एक लिखित प्रमाण, जिसे वेपके ने उद्धृत किया है, बड़े महत्व का है, क्योंकि उससे इस बात का प्रदर्शन होता है कि ६७० ई० में गोवार अको के साथ-साथ अरबी अको का प्रयोग होता था। उक्त ग्रन्थ का नाम है 'अब मन्मन्दी मनोहर और सुन्दर प्रश्न', और इसे अहमद इब्न मोहम्मद इब्न अब्दुलजील अबू सईद, अल् सिज्जी (६५१-१०२४ ई०), ने नजीफ इब्न यमन, अल् काम (मृत्यु ६६० ई०), नामक हबीश उत्तुल्ला की बिसी पुस्तक से नकल किया था। स्प्रेन्जर ने भी इस तथ्य की ओर ध्यान आकर्षित किया है (जाइट्श्विट डेर ड्वायोनमोंगेन-लेण्डेन गेनेरशाफ्ट जिल्द ४५, पृ० ३६७)। जली इब्न अहमद अलनमावी (लगभग १०२५ ई०) लिखता है कि उसके समय में अको के आकार का निर्णय नहीं हुआ था (सिम्प आर कार्पेन्की, प्रब्लेम्स ग्रव पृ० ६८)।

यदि कोई अन्य कारण न भी रहा हो तो भी कम से कम अपने राजनैतिक प्रतिद्वन्द्वियों से वैषम्य स्थापित रखना अवश्य था।

(४) पश्चिमी अरब के निवासियों को यह स्मरण था कि प्राचीन अक भारतीय उत्पत्ति के हैं, अतएव वे लोग उन अको को गोवार अक कहते थे।

(५) आठवीं शताब्दी के अनन्तर भारतवर्ष में अको के आकारों में पुनः परिवर्तन हुए और उन्होंने अत्यन्त परिष्कृत आधुनिक देवनागरी अको का आकार ग्रहण किया।

इसमें सन्देह नहीं कि ईसा की दूसरी शताब्दी में भारतीय अक अलेक्जेंड्रिया निवासियों को ज्ञात थे। परन्तु यह प्रश्न उठना स्वाभाविक है कि किन कारणों से अलेक्जेंड्रियावालों ने इन अको का प्रयोग किया और उनका ज्ञान बनाये रखा? जहाँ तक हम लोगों को विदित है, उन लोगों के पास अपने निजी अक भी थे। तब क्या कारण है कि उन्होंने विदेशी अको को अधिक पसन्द किया? इन प्रश्नों का सतोषजनक उत्तर तब तक नहीं दिया जा सकता जब तक हम यह कल्पना न कर लें कि ९ अक सकेतो के साथ-साथ स्थान-मान सिद्धान्त और कदाचित् शून्य भी अलेक्जेंड्रियावालों को बताया गया था। परन्तु इस निगूढ़ सिद्धान्त का स्वागत करने को वे तैयार न थे, अतएव उन्होंने केवल नौ अको को ग्रहण किया और एवैकम पर उनका प्रयोग किया। वहाँ से वे अक रोम और पश्चिमी अफ्रीका को पहुँचाये गये थे।

दूसरी कल्पना कि अरबवालों ने ८वीं शताब्दी के भारतीय अको को ग्रहण किया तथ्यों से अनमोदित नहीं होती। अरबी की प्राचीन हस्तलिपियों में मिलनेवाले अक, आठवीं शताब्दी के भारतीय अको की अपेक्षा, गोवार अकों, या आधुनिक अरबी अकों में अधिक समता रखते हैं। वस्तुतः इस बात पर विश्वास करने के अनेक कारण हैं कि भारतीयों के सीधे सम्पर्क में आने से बहुत पहले ही अरबवाले स्थान-मान एवं शून्य से रहित गोवार अको का जानते थे, तथा शून्य को उन्होंने केवल ७५० ई० के लगभग ही ग्रहण किया।

१६. यूरोप में हिन्दू अक

वैयथ्यस समस्या

यह निश्चयपूर्वक नहीं कहा जा सकता कि हिन्दू अको का प्रवेश यूरोप में कब और कैसे हुआ। ये अक प्रथम बार वैयथ्यस (ल० ५०० ई०) की क्षेत्रगणित की एक हस्तलिपि में मिलते हैं, जो कि ईसा की १०वीं शताब्दी की बतायी जाती

है। इस पुस्तक की अनेक अन्य हस्तलिपियाँ उपलब्ध हैं और सभी में अक विद्यमान है। कुछ हस्तलिपियों में तो शून्य भी मिलता है। यदि ये हस्तलिपियाँ (अथवा इन हस्तलिपियों के वे भाग जिनमें अक विद्यमान है) प्रामाणिक मानी जायँ, तो यह स्वीकार करना पड़ेगा कि हिन्दू अक ईसा की पाँचवीं शताब्दी के प्रायः अन्तिम काल तक यूरोप में प्रविष्ट हो चुके थे। कुछ विद्वानों के मत से व्हेथिअस की क्षेत्रगणित के अक-सम्बन्धी अवतरण जाली हैं। इन लोगों के तर्कों का सारांश निम्नलिखित है।

(१) प्रस्तुत अवतरण ग्रन्थ के मुख्य विषय, अर्थात् क्षेत्रगणित से, कोई सम्बन्ध नहीं रखते। व्हेथिअस की अकगणित में हिन्दू अकों की चर्चा नहीं है। किसी अन्य स्थान पर उसने उनका प्रयोग नहीं किया है। न समकालीन कैपेला (लगभग ४७५ ई०) ने अथवा व्हेथिअस के ग्रन्थों से परिचित किसी अन्य मध्यकालीन लेखक ने उन अकों का उल्लेख किया है।

(२) हिन्दू अक-संकेत की सिद्धि भारतवर्ष में पाँचवीं शताब्दी के बहुत समय बाद हुई थी, अतएव यदि हिन्दू अक व्यापारिक मार्गों द्वारा यूरोप को ले भी जाये गये हों, तो भी वे पश्चिम के अकों से श्रेष्ठ होने का दावा नहीं कर सकते थे, और इसलिए वे व्हेथिअस का ध्यान आकर्षित नहीं कर सकते थे।

उपर्युक्त तर्कों में से दूसरा वास्तविकता के विरुद्ध है, क्योंकि अब यह सिद्ध हो चुका है कि हिन्दू अक-संकेत, जिसमें शून्य सम्मिलित था, ईसा की प्रारम्भिक शताब्दियों में उत्पन्न अवस्था को पहुँच चुका था तथा भारतवर्ष में प्रचलित था। अतएव वे अक ईसा की पाँचवीं शताब्दी अथवा पहले ही व्यापारिक मार्गों द्वारा मरुलतापूर्वक यूरोप पहुँच सकते थे। पहला तर्क बिल्कुल कल्पनिक है और व्हेथिअस की क्षेत्रगणित में मिलनेवाले अकों की प्रामाणिकता पर सन्देह उत्पन्न करता है। इसमें कुछ भी निश्चय नहीं होता। जब उन ग्रन्थों की सभी प्राप्त हस्तलिपियों में अक उपलब्ध है, तब उन अकों के अस्तित्व की प्रामाणिकता पर सन्देह प्रकट करना अनुचित प्रतीत होता है। क्षेत्रगणित में उन अकों की उपस्थिति को हम यह कारण समझ सकते हैं कि उन अकों के विषय में व्हेथिअस का ज्ञान अत्यल्प था। उक्त उन अकों को किसी न किसी स्त्रोत से प्राप्त किया था—चाहे पैयागोरस के नवीन सप्रदायवादियों ने, अथवा किसी व्यापारी ने अथवा किसी पर्यटनयात्री विद्वान ने—परन्तु वह उनका प्रयोग नहीं जानता था। सम्भव है कि स्थान-मान निरासत और अन्य की नशाहता ने वह उड़ी-बड़ी मरुलताओं को जित लेता हो, परन्तु

यह निश्चित है कि वह उनके द्वारा माधारण गणितीय क्रियाएँ करने की विधि नहीं जानता था। अतएव वह अकगणित में अथवा किसी अन्य ग्रथ में उनका प्रयोग न कर सका। 'सेवोस्त' (ल० ६५० ई०) के ग्रथों से स्पष्ट है कि भारतीय अकों का पश्चिम में निश्चित रूप से प्रचार होने में बहुत पहले ही उनकी ख्याति वहाँ पहुँच चुकी थी। अतएव वेथिअस के द्वारा पश्चिम में हिन्दू अकों के प्रचार का प्रश्न तब तक अनिर्णीत ही समझा जाना चाहिए, जब तक आगे के अनुसन्धान इसका कोई निश्चित निर्णय न कर दे।

निश्चित प्रमाण

सर्वप्रथम लेखक जिमने ईसाई यूरोप में गोवार अकों का वैज्ञानिक ढग में वर्णन किया था गर्वर्ट नाम का एक फ्रान्सीसी भिक्षु था। गर्वर्ट प्रसिद्ध विद्वान था। इटली में वह कई उच्च पदों पर रह चुका था और पोप के पद के लिए उसका निर्वाचन हुआ था (९९९ ई०)। तीन वर्ष तक वह स्पेन में भी रहा था। निश्चित रूप में नहीं कहा जा सकता कि उसको गोवार अक कहाँ से प्राप्त हुए। कुछ लोगों का कथन है कि उसे वे अक स्पेन में मूरो द्वारा मिले, अन्य लोग कहते हैं कि किसी अन्य स्रोत, सम्भवतः किसी व्यापारी, से मिले। गर्वर्ट को ये अक मुन्दर नहीं प्रतीत हुए (और उचित ही, क्योंकि उनमें न तो शून्य ही था और न स्थान-मान), और उसने 'रेगुला डे एवैको कम्प्यूटी ऐण्ड दि लिबेलस' नामक ग्रथों में रोमन अकों का ही प्रयोग किया है। इस प्रकार हम देखते हैं कि गर्वर्ट के समय तक स्थान-मान सिद्धान्त यूरोप को विदित नहीं हुआ था।

७११ ई० के 'जरेज डे ला फ्राटेरा' के युद्ध में गाँथ लोगों की शक्ति पूर्णरूप में छिन्न-भिन्न हो गयी। ठीक उसी समय मूर लोग स्पेन के स्वामी हो गये और ५०० वर्ष पर्यन्त उसके स्वामी बने रहे। आधुनिक अक-संकेत के सिद्धान्त का ज्ञान, जो कि ८वीं शताब्दी के मध्य तक निश्चय ही बगदाद पहुँच चुका था अवश्यमेव स्पेन पहुँचा होगा और वहाँ में उसका प्रवेश यूरोप के अन्य देशों में हुआ होगा। फारडोवा, ग्रेनाडा और टोलेडो में मूरो द्वारा स्थापित स्कूल सम्पूर्ण मध्यकाल में विद्या के सुप्रसिद्ध केन्द्र थे जो यूरोप के सभी भागों के विद्यार्थियों को आकर्षित करते थे। उस प्रकार यद्यपि यूरोप अपने अकों के लिए मूरो का प्रत्यक्ष ऋणी न भी रहा हो, तो भी उस सुप्रसिद्ध सिद्धान्त के लिए मूरो का वह अवश्य ऋणी है जिसके कारण माधारण गोवार अकों की मतिमा रोमन अकों में बढ गयी।

आधुनिक अक-मकेत सिद्धान्त के कतिपय उदाहरण बारहवीं शताब्दी में यूरोप में मिलते हैं, परन्तु प्रतीत होता है कि तेरहवीं शताब्दी में पहले उनके प्रचार का कोई निश्चित प्रयत्न नहीं किया गया। सम्भवतः पीसा नगर के निवासी ल्योनार्डो फिबोनकी ही ऐसा व्यक्ति था जो इन अको को फैलाने में अत्यन्त प्रभावशाली मिश्र हुआ। ल्योनार्डो का पिता बारबरी के समुद्र तट पर स्थित वुगिया (आधुनिक वीगी) नाम के नगर में अढतिया था। यह नगर उस समय के श्रेष्ठतम बन्दरगाहों में से था, तथा बारहवीं शताब्दी के अन्त में अफ्रीका के व्यापार का केन्द्र था। यही पर किमी मूर गुरु से ल्योनार्डो की शिक्षा हुई थी। युवक होने पर उसने रूममागर के देशों का पर्यटन किया, उसने सीरिया, ग्रीस, इटली और प्रोवेन्स आदि देशों को देखा, वहाँ के विद्वानों से तथा व्यापारियों से मुलाकात की, और उस समय के व्यापारी केन्द्रों में प्रचलित अक-पद्धतियों का ज्ञान प्राप्त किया। उसका कहना है कि वे सभी पद्धतियाँ हिन्दुओं की पद्धति के सामने दोषपूर्ण थीं। पीसा नगर को लौटने पर १२०२ ई० में उसने 'लिवर एवैकी' नाम की पुस्तक लिखी, जिसको १२०८ ई० में उसने दूसरी बार लिखा।^१ इस पुस्तक में उसने हिन्दू अको को समझाया है और व्यापार में सम्बन्ध रखनेवाली साधारण गणनाओं में उनका प्रयोग किया है। प्रारम्भ में ल्योनार्डो की पुस्तक का जन-साधारण में स्वागत नहीं हुआ, कारण यह था कि वह व्यापारियों के लिए अत्यन्त उँचे दर्जे की थी और विश्वविद्यालयों के लिए अत्यन्त साधारण थी। तो भी कालान्तर में लोगों ने उसका महत्त्व अनुभव किया और तब हम देखते हैं कि उसे नववालीन गणितीय साहित्य में सर्वोच्च स्थान प्राप्त हुआ।

अन्य लेखकों में, जिनके ग्रन्थों में भारतीय अको के प्रमाण में सहायता मिली, जलबजेन्टर डे विला डी (ल० १२४० ई०) और जान ऑव हैलीफास (ल० १२५० ई०) के नाम उल्लेखनीय हैं।

एवंसे के प्रयोग करनेवालों ने जो शून्य या प्रयोग नहीं करने थे, हिन्दू अकों के प्रसार का उद्वेग विरोध किया। परन्तु ल्योनार्डो की पुस्तक व्यक्तियों की लेखनी ने उन लोगों के मूढ़ वन्दन में पूर्ण सफलता प्राप्त की क्योंकि उसमें दो तीन शताब्दियाँ गयी थीं। पंद्रहवीं शताब्दी के मध्य तक

^१ जिसका ज्ञान कार्लिन्की पुस्तक में पृ० १३३।

पश्चिमी यूरोप के सभी राष्ट्रों ने सामान्य रूप से इन अकों को ग्रहण कर लिया था, परन्तु उनका सामान्य प्रयोग केवल मत्रहवीं शताब्दी में ही हुआ।

१७ हिन्दू अकों के विविध उल्लेख

सीरिया के उल्लेख

सेवेरस सेवोस्त (६६२ ई०) के ग्रन्थ से उद्धृत निम्नलिखित अवतरण^१ से प्रदर्शित होता है कि सातवीं शताब्दी के आरम्भ में ही हिन्दू अकों की स्याति यूफ्रेटिस नदी के तट तक पहुँच चुकी थी। सेवोस्त सीरिया देश का एक विद्वान था जो पेट्रियार्क अथेनेसियस गमेनली (मृत्यु ६३१ ई०) और उसके उत्तराधिकारी जान के समय में, यूफ्रेटिस नदी के तट पर केनेशर के वनवाये मठ में रहता था।^२ प्रतीत होता है कि सेवोस्त कुछ यूनानी विद्वानों की धृष्टता में आहत था, जो सीरिया-वालों को नीची दृष्टि से देखते थे, और सीरियावालों की रक्षा करने में वह उन्हें ज्योतिष के आविष्कार का गौरव प्रदान करता है। वह कहता है कि यूनानी लोग बैबिलन नगर के निवासी खाल्दियन लोगों के शिष्य हैं और वे खाल्दियन लोग ही सीरिया वाले हैं जिन्हें यूनानी लोग बदनाम करते हैं। इसी सिलसिले में दृष्टान्त के रूप में वह हिन्दुओं का उल्लेख करता है और कहता है

“मैं हिन्दुओं के शास्त्रों के सभी विवेचन को छोड़ता हूँ—उन हिन्दुओं के जो सीरियन लोगों में भिन्न हैं—न उनकी विज्ञान विषयक विलक्षण गवेषणाओं के विषय में कहेंगा जो यूनानी लोगों की गवेषणाओं की अपेक्षा अधिक कौशलपूर्ण हैं, और न उनकी वर्णनातीत गणना के विषय में ही। मैं केवल यह कहना चाहता हूँ कि यह गणना नौ चिह्नों की महायता में की जाती है। यदि वे लोग, जो केवल यूनानी भाषा बोलने के कारण ही यह समझते हैं कि वे विद्या की सीमा पर पहुँच चुके हैं, इन बातों को जाने तो उन्हें विश्वास हो जायगा कि उन लोगों के अतिरिक्त भी ऐसे लोग हैं जो कुछ जानते हैं।”

^१ इस अवतरण की ओर सर्वप्रथम एफ० नऊ ने ध्यान आकर्षित किया था। देखिए जर्नल एशियाटिक, २, १९१०, पृ० २२५-२२७, जे० जिन्सबुर्ग, बुलेटिन अमेरिकन मैथमेटिकल सोसायटी २३, १९१७, पृ० ३६८।

^२ डब्ल्यू० राइट, शार्ट हिस्ट्री ऑफ़ मिरिअक लिटरैचर, पृ० १३७-१३९।

यह उद्धरण स्पष्टतया प्रदर्शित करता है कि सेवोस्त हिन्दू अको से केवल परिचित ही नहीं था बल्कि उसे उनके विषय में पूर्ण ज्ञान भी था और सम्भवतः गव्वो वेन एजरा की भाँति वह शून्य से भी अवगत था, यद्यपि उसने भी केवल नौ अको की ही चर्चा की है। वस्तुतः आज भी हम केवल नौ अको की ही चर्चा करते हैं, शून्य की गणना अको में नहीं करते।

अरब के उल्लेख

डॉन व्हगिया (८५५ ई०) 'प्राचीन वर्णमाला एवं हिएरोग्लिफिक लिपि का स्पष्टीकरण इत्यादि' नामक अपनी पुस्तक में डॉन व्हगिया ने तीन प्रकार के भारतीय अको का एवं तीन प्रकार की भारतीय वर्णमाला के स्वरूपों का वर्णन किया है।^१ प्रतीत होता है कि ये स्वरूप उस समय अरब में भली भाँति ज्ञात थे। पहले प्रकार के स्वरूपों में उस समय अरब लोगों में प्रचलित प्रथा के अनुरूप शून्य के स्थान में बिन्दु का प्रयोग किया गया है, दूसरे प्रकार के स्वरूपों में बिन्दु को मोटा कर दिया गया है, और तीसरे प्रकार के स्वरूपों में अकमूचक चिह्नों में एक चक्र जोड़ दिया गया है।^२ कार्पिन्की का विचार है कि चक्रों का प्रयोग डॉन व्हगिया का आविष्कार है।

जाहिज (मृत्यु ८६९ ई०)

अरब के दायनिक जाहिज ने अको को 'हिन्द के स्वरूप' कहा है और लिखा है कि उन अको की सहायता में बड़ी-बड़ी सरयाएँ सरलता में लिखी जा सकती हैं। वह प्रश्न करता है "हिन्द के स्वरूपों का आविष्कारक कौन है? यदि हिन्द (ब्राह्म-स्फुट-मिटान्त) और जरकन्द (खण्डवायक) के रचयिता एवं शून्य की सहायता में गणना करने की विधियाँ के प्रणेता कौन हैं?"^३

^१ कार्पिन्की, विलियमोयेका मैथेमेटिका, १३, १६१०-१३, पृ० ६७-८।

^२ भारतवर्ष में मिलने वाली कुछ हस्तलिपियों में भी इसी प्रकार के बिन्दुओं का प्रयोग मिलता है। देखिए आर० एल० मित्र, नोटिसेन ऑन मस्युन मैनस्क्रिप्ट्स, ५, पृ० २६६, मैनस्क्रिप्ट न० १६७६, पद न० १, इटाली आफिम बटोनींग, मैनस्क्रिप्ट न० १६४६, १६४७ और १८७१।

^३ यह स्वरूप उन भारतीय सङ्ख्याओं के सदृश है जो उस समय लिखे जाते थे जब स्थान-मान का प्रयोग नहीं होता था। पीछे देखिए।

^४ जाहिज के इस का प्रामाण्य अनुवाद उपलब्ध है (फार्ने, दू गो म दु वाँ १२४)। देखिए एंग डे वी, नियसिया २६, १६२६, पृ० २७३-२८०।

अबुल हसन अल-मसऊदी (६४३ ई०)

अरब का इतिहासकार अल-मसऊदी लिखता है “सृष्टिकर्ता ब्रह्मा के आदेशानुसार ऋषियों के एक परिषद् ने नी अको तथा ज्योतिष आदि शास्त्रों का निर्माण किया।”^१ अल-मसऊदी की माथी महत्त्व की है क्योंकि भारतवर्ष के विषय में उसे प्रत्यक्ष ज्ञान था। ०१० ई० में वह मुत्तान में था और ११६ ई० में खम्भात में।

अबू सहल इब्न तमीम (६५० ई०)

अफ्रीका के उत्तर में ट्यनिम नगर के पास स्थित कैरवाँ गाम का निवासी इब्न तमीम ‘सिफर यसीरह’ नामक ग्रन्थ के भाष्य में लिखता है “हिन्दुओं ने, उकाइयों को सूचित करने के लिए, नी चिह्नों का आविष्कार किया है। हिन्दू गणित पर लिखी हुई ‘हिमाव अल-गोवार’ नामक पुस्तक में मैंने उनके विषय में पर्याप्त कथन किया है।”^२

अल-नदीम (६८७ ई०)

लगभग २०० भारतीय वर्णमालाओं की ‘फिहरिस्त’ नामक सूची में अल-नदीम ने हिन्दू अकों को भी सम्मिलित किया है। इन अकों को उसने ‘हिन्दिमा’ कहा है।^३

अल-बेल्नी (१०३० ई०)

अल-बेल्नी भारतवर्ष में लगभग तेरह वर्ष रहा और अपना समय हिन्दू कला एवं विज्ञान के अध्ययन में व्यतीत किया। उसे यूनानी विज्ञान और साहित्य का अद्भुत ज्ञान था, अतएव उसे अपने समकालीन एवं पूर्वकालीन लेखकों की अपेक्षा अकों की उत्पत्ति के विषय में अधिकार लिखने की अधिक योग्यता थी। (इस विषय पर) उसने दो पुस्तकें लिखी हैं जो ‘किताब अल अरकाम’ (अर्थात् ‘अक विद्या की पुस्तक’) और ‘तस्किरा की अल-हिमाव व’अल मद्द वि अल-अरकाम अल-मिन्द व’अल हिन्द’ (अर्थात् ‘अकगणित तथा गिनत और हिन्द की

^१रेनॉड, मेम्वार सू लो, पेरिस, १८६४, पृ० ३००। इससे प्रतीत होता है कि, बहुत अधिक समय व्यतीत हो जाने के कारण, दशवीं शताब्दी में हिन्दू लोग अकों के आविष्कार अथवा आविष्कारकों को भूल चुके थे।

^२रेनॉड, पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ० ३६६।

^३किताब अल-फिहरिस्त, जी० लफूगेल द्वारा संपादित, २, पृ० १८-१९।

अकगणना पद्धति का विवेचन') नामो से प्रसिद्ध हैं। 'तारीख अल हिन्द' (अर्थात् 'भारतवर्ष का इतिहास') नामक पुस्तक में वह लिखता है 'जिम भाँति भारतवर्ष के भिन्न-भिन्न स्थानो में वर्णमाला के आकार भिन्न-भिन्न हैं, ठीक उम्मी भाँति अको के आकारो में भी विभिन्नता है। हम लोग जिन अको का प्रयोग करते हैं, वे हिन्दू अको के सर्वोत्तम आकारो से व्युत्पन्न किये गये हैं।" हमारे स्थान पर वह लिखता है "हिन्दू लोग अकगणित में अको का प्रयोग उम्मी भाँति करते हैं जैसे हम लोग करते हैं। हमने एक पुस्तक लिखी है जिसमें हमने दिखाया है कि हिन्दू लोग इस विषय में हम लोगो में सम्भवतः कितना आगे बढ़े हुए हैं।"^१ 'आमार-उल-वाकिया' (अर्थात् 'अतीत के अवशेष', रचनाकाल १००० ई०) नामक पुस्तक में अल बेरुनी ने आधुनिक अको को "अल-अरकाम अल-हिन्दी" अर्थात् "हिन्द के अक" कहा है और प्रसंगवश वह भी उल्लेख किया है कि ये अक पण्डित-सिद्धान्त तथा अक्षर सिद्धान्तवाले अको (हल्फ अल-जुमल) से भिन्न हैं।

अबिनरेगल (१०४८ ई०)

अली बिन अबिल रेगल अबुल हसन, जो अबिनरेगल के नाम से प्रसिद्ध है, ने लिखा है कि जो गणना नौ अको द्वारा की जाती है उसका आविष्कार करनेवाले हिन्दू दागनिक हैं।^२

सर्फुद्दीन (११७२ ई०)

सबका निवामी महमूद बिन काजिद अल-जमूनी सर्फुद्दीन ने 'फी अल-हन्दमा व'अल अरकाम अल-हिन्दी' ('क्षेत्रगणित तथा भारतीय अक') नामक पुस्तक की रचना की थी।

^१ भारत, अलबेरुनी-वृत्त, ई० सी० साच्चो-वृत्त अँगरेजी अनुवाद, लंदन, द्वितीय संस्करण, १६१०, जिह्वा १, पृ० ७४।

^२ पूर्वोक्त ग्रंथ जिह्वा १, पृ० १७७।

^३ दि ब्रानोलाजी आव एशेन्ट नेशस, सार्चो द्वारा संपादित, लंदन, १८७६, पृ० ६२ और १३२।

^४ जे० एफ० मोट्यूकना, इतुवार दे मापेमाटीव जिह्वा १, पृ० ३७६।

एच सूटर दो मापेमाटीवर उण्ट अस्ट्रानोमर डेर अगानेर उण्ट डेर वेबे, लाइपजिग, १६००, पृ० १८६।

अल-कलसादी (मृत्यु १४८६ ई०)

इब्न अलवन्ना कृत 'तलखीम' के भाष्य में अबुल हमन अली अल-कलसादी कहता है "ये नी चिह्न, जो गोवार (धूल) के चिह्न कहलाते हैं, वे चिह्न हैं जो हमारे स्पेन के प्रान्तों तथा मगरिब एव अफ्रीका के देशों में बहुधा प्रयोग किये जाते हैं। इनकी उत्पत्ति परम्परा में भारतीय राष्ट्र के एक व्यक्ति को आरोपित की गयी है। लोगों का कथन है कि उस व्यक्ति ने कुछ वारीक धूल लेकर एक पट्टे पर फैला दिया और लोगों को गुणा, भाग तथा अन्य गणित की क्रियाएँ करना सिखाया।"^१

बेहाउद्दीन (लगभग १६०० ई०)

अको के सम्बन्ध में बेहाउद्दीन लिखता है "हिन्दू लोगों ने ही वस्तुन नी प्रचलित अको की मृष्टि की है।"^२

उपर्युक्त उल्लेखों में 'हिन्द' शब्द का प्रयोग भारतवर्ष के अर्थ में और 'हिन्दी' शब्द का प्रयोग भारतीय के अर्थ में हुआ है। अरबी और फारसी साहित्य में भारतवर्ष के अर्थ में प्रायः 'हिन्द' शब्द का ही प्रयोग हुआ है। प्रारम्भिक लेखों में कभी-कभी सिन्ध और हिन्द में भेद किया गया है। उदाहरणतः, अल-ममऊदी और अल-बेस्तनी ने सिन्ध शब्द का प्रयोग सिन्ध नदी के पश्चिमवाले देशों के अर्थ में किया है। यह भेद इब्न हीकल के मानचित्र में जो इलियट और डामन कृत 'भारतवर्ष के इतिहास' में उद्धृत किया है, भली-भाँति दृष्टिगोचर होता है। कुछ लोगों ने इस भेद को उपेक्षा की है। उदाहरणतः, इस्तखरी (९१२ ई०) ने हिन्द शब्द का प्रयोग सम्पूर्ण भारतवर्ष के अर्थ में किया है।^३ और फिर-दोसी कृत 'शाहनामा' में सिन्ध शब्द का प्रयोग नदी तथा देश के अर्थ में तथा हिन्द शब्द का प्रयोग सम्पूर्ण भारतवर्ष के अर्थ में किया गया है। आगे चलकर यह भेद पूर्णतया लुप्त हो गया। इब्न सीदेह (मृत्यु १०६६ ई०), फीरोजावादी (१३२८-१४१३ ई०) आदि कोपकारों के अनुसार हिन्द 'एक सुप्रसिद्ध राष्ट्र का

^१ जए, १८६३, पृ० ५६ आदि।

^२ खोलासा अल-हिसाब, ए० मारे द्वारा फ्रासीसी में अनुवादित, न्यू० अनाल्स मैथेमेटिक जिल्द ५, १८६४, पृ० २६६।

^३ इलियट और डामन कृत भारतवर्ष का इतिहास, भाग २, पृ० ४१२।

^४ ए० जी० वार्नर और ई० वार्नर कृत अँगरेजी अनुवाद, लंदन, १९०६।

नाम है तथा एल० जीहरी (१००८ ई०) के अनुसार यह 'एक देश का नाम' है। अरब साहित्य में भारतवर्ष के अर्थ में हिन्द शब्द के प्रयोग के अनेक उदाहरण मिल सकते हैं।

केरा डे दो' ने सुझाव दिया है कि सम्भवतः हिन्द शब्द का अर्थ भारतवर्ष नहीं है, बल्कि इसकी व्युत्पत्ति वस्तुतः 'एन्द' (अथवा 'हेन्द') शब्द से हुई है जिसका अर्थ है "माप", "अकगणित" या "क्षेत्रगणित"। और इसमें उसने यह निष्कर्ष निकाला है कि 'हिन्द के चिह्न' का अर्थ 'अकगणित के चिह्न' है न कि 'भारतवर्ष के चिह्न'। हिन्द शब्द में बने हुए विशेषण 'हिन्दी' के सम्बन्ध में, जिसको कुछ विद्वानों ने अको के सिलसिले में प्रयोग किया है, उसका अनुमान है कि इसका प्रयोग सम्भवतः भ्रमवश 'हिन्दसा' के अर्थ में हुआ है।

केरा डे दो की, एण्ड या हे द शब्द से की गयी, हिन्द शब्द की व्युत्पत्ति स्वीकार नहीं की जा सकती। अरबी कोषों में इसे समर्थन नहीं मिलता। इसके अनिवार्य, हिन्द शब्द बहुत प्राचीन है। इसका प्रयोग अवेस्ता^१ में, पहले के यज्ञ तथा बाद के वेण्टिडाट दोनों में, मिलता है। डेरिजम हिस्तेस्पम के व्युत्पत्ति-अन्तर्लक्षों में भी इसका प्रयोग मिलता है। अरबों की ईरान-विजय के पूर्व के पहलवी लेखों में भी हिंद शब्द के दर्शन होते हैं। इन सबमें इसका प्रयोग भारतवर्ष के अर्थ में हुआ है।

हिन्दी शब्द हिंद शब्द का विशेषण है और इसका अर्थ है 'भारतीय'। कुछ इन गिने गयानों पर इसका प्रयोग भ्रमवश हिन्दनी के अर्थ में किये जाने में यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता कि ऐसा प्रत्येक ग्यान पर हुआ है।

हिन्दसा आदि शब्द

अधिकारी विद्वानों का कथन है कि हिन्दसा, हिन्दसा, हिन्दसा, हिन्दनी, हिन्दमी इत्यादि शब्द हिन्द शब्द के विशेषण हैं, जिसका अर्थ है 'भारतीय'। के^२ और

^१केरा डे दो सियासिया, जिल्द २१, १६१७, पृ० २७३।

^२यस्त, १० १४१, यस्त, १० १०४ (मिह्र यस्त)।

^३के, जनरल जिव दि एगियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल जिल्द ३, १६०७, पृ० ४८८, और जनरल जिव एगियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल, जिल्द ७, १६११, पृ० ८१० आदि।

केरा डे वो' ने इस व्याख्या का विरोध किया है। फीरोजावादी के शब्दकोष के आधार पर उन लोगों का कथन है कि ये शब्द फारसी के 'अन्दाजह' शब्द से, व्युत्पन्न किये गये हैं, जिसका अर्थ है "माप।" इसमें संदेह नहीं कि अरबी भाषा में हिन्दसी शब्द का अर्थ 'रेखा-गणित सम्बन्धी' है। परन्तु जब इस शब्द का प्रयोग "दोहरी कम्पना के नियम" या "नौ की महायता में होने वाली उत्पत्ति" के मिलमिले में अथवा 'अक संकेत' के मिलसिले में किया जाता है, तब यह मानना पड़ेगा कि इस शब्द का कोई दूसरा अर्थ भी था। चूँकि हिन्दसी नामक गणितीय नियम, अरब में उनका प्रयोग होने में पहले, हिन्दू अकगणित में मिलते हैं, अतएव हिंदसी का अर्थ 'भारतीय' भी है। अतएव हिन्दसी, हिन्दवा, अथवा हिन्दसा शब्द के दो अर्थ हैं (१) "क्षेत्रगणित सम्बन्धी" और (२) "भारतीय।" इस शब्द के अर्थ से सम्बन्ध रखनेवाला विवाद जो कि वेपके^१ ने शान्त कर दिया था पुन उठ खड़ा हुआ है, क्योंकि के तथा केरा डे वीम महोदयों ने दोनों अर्थों की सत्यता को स्वीकार करना अस्वीकार कर दिया है।^२ इस स्थल पर सूचित किया जा सकता है कि चूँकि हिन्दसी शब्द का एक अर्थ 'हिन्दी का पर्यायवाचक है अतएव आश्चर्य नहीं कि भ्रमवश कभी कभी लोगों ने, विशेषकर मूल ग्रंथ के अनभिज्ञ लेखकों ने, एक शब्द का प्रयोग दूसरे के स्थान में कर दिया हो

यूरोपीय उल्लेख—सेवाइल का आइसोडोरस

सेवाइल के आइसोडोरस द्वारा लिखित ओरिजिन्स नामक पुस्तक के प्रथम अध्याय (जो रोमन अकों में सम्बन्ध रखता है) के परिशिष्ट में गोवार अकों के आकारवाले नौ अक, जिनमें शून्य सम्मिलित नहीं है दिये गये हैं। इसी ग्रन्थ की दूसरी स्पेनिश प्रतिलिपि (१०२ ई०) में भी उसी स्थान पर ये अक मिलते

^१ पूर्वोक्त पत्रिका।

^२ वेपके, इंडियन ऐक्वेटरी, जिल्द १, १८६३, पृ० २७ आदि। निम्न भी देखिए—इन्साइक्लोपीडिया ऑव इस्लाम में 'हिन्दसा' शब्द पर सूटर का लेख, रोजेन कृत अलजवरा ऑव म्हेम्मद बेन मूसा १८३१, पृ० १६६ आदि।

^३ किसी भी साहित्य में ऐसे शब्द निकालना कठिन होगा जिनके एक से अधिक अर्थ हो। कई अवसरों पर इन अर्थों का आपस में कोई सम्बन्ध नहीं होता। जब कभी ऐसे शब्द का प्रयोग होता है, तब उसका समुचित अर्थ संदर्भ से निश्चित करना पड़ता है।

हैं। लेखक ने निम्नलिखित शब्दों में इन अको की उत्पत्ति भारतीय बतलाया है। “ऐसा ही अकगणित के चिह्नों के विषय में है। यहाँ पर देखने योग्य है कि भारतीयों की बुद्धि अत्यन्त प्रखर है अन्य राष्ट्र अकगणित, क्षत्रगणित तथा मस्कारी कलाओं में उनमें हीन हैं। उनके नौ अकचिह्नों से तो यह स्पष्ट ही है, जिनका प्रयोग करके वे किसी भी बड़ी से बड़ी मर्यादा को व्यक्त कर सकते हैं। इन अको के आकार ये हैं।”

रब्बी बेन एजरा

रब्बी अब्राहम डब्लु मीर डब्लु एजरा ने “सिफर-ह-मिस्पर” (अको की पुस्तक) नामक अपने ग्रंथ में हिन्दू-आकार के अक दिया है। उसे अको की हिन्दू-उत्पत्ति का ज्ञान था, क्योंकि वह लिखता है “इसका यही कारण है कि भारतवर्ष के विद्वानों ने अपने संपूर्ण अको को ९ के द्वारा विभेदित किया है एवं ९ गूणों के लिए आकारों का निर्माण किया है।”

पीसा का लियोनार्डो

पीसा निवासी लियोनार्डो अपने ग्रंथ ‘लिवर एवैकी’ (१२०२ ई०) में प्रायः ९ भारतीय अको का उल्लेख करता है। अन्य स्थान पर वह लिखता है “जहाँ भारतीयों के नौ अक-चिह्नों की सहायता से अदभुत ढंग की गिनती देकर (गणित वी) की कला का प्रचार किया।”^१ दूसरे स्थान पर, एक विभिन्न विषय के क्षेपक के तौर पर लिखता है “भारतीय नौ अकचिह्नों का ज्ञान” इत्यादि, “भारतीय नौ अक-चिह्न हैं ९ ८ ७ ६ ५ ४ ३ २ १।”^२

एलेक्जेंडर डे विला हाइ

एलेक्जेंडर डे विला हाई (ल० १२४० ई०) ने ‘कामेन दे अल्गोरिज्मो’ नामक कुछ कविताओं पर एक भाष्य लिखा है। इन भाष्य में वह कहता

‘स्मिथ और कार्पिस्की (पूर्वोक्त, पृ० १३८) द्वारा उद्धृत लेटिन मूल का अनुवाद।

^१सिफर-ह-मिस्पर जेन दस टेर ल्पल ऐन हिस्ट्री ऑफ् आरिथमेटिक्स बेंक टेम जार० अब्राहम डब्लु एजरा मोरिल्लो नित्स्वरदेर्ग, फ्रांक्फर्ट जाम् माइन १८०९, पृ० २।

^२लिवर एवैकी, रोम, १८५७, स्मिथ और कार्पिस्की (पूर्वोक्त पृ० १०) द्वारा उद्धृत।

है “यह पुस्तक जनमाधारण के (उच्चारण के) अनुसार अल्गोरिम अथवा आगरिम कहलाती है। इसका विषय अकविद्या है, जिसे अल्गोरिम भी कहते हैं। भारतवर्ष में अल्गोर नाम का एक राजा था, उसी ने इस अल्गोरिम विद्या का आविष्कार किया था। इस विद्या में हम लोग हिन्दुओं के दस अकचिन्हों का प्रयोग करते हैं।”

मैक्सिमस प्लानुडेस (ल० १३३० ई०)

मैक्सिमस प्लानुडेस ने लिखा है कि “९ (अक) चिह्न भारतीयों में प्राप्त हुए हैं।”^१

^१स्मिथ और कार्पिस्की, पूर्वोक्त, पृ० ११।

^२देखिए वेशके कृत जर्मन अनुवाद, हाले, १८७८, पृ० ३।

सारिणी १- खरोरठी के अंक

शक, पार्थिवन और कुषान अन्तर्लेख			अशोक के अन्तर्लेख	
३३	४०	/	/	१
७३३	५०	//	//	२
३३३	६०	///		३
७३३३	७०	X	////	४
३३३३	८०	IX	////	५
११	९००	II X		६
१॥	२००	III X		७
१॥	३००	XX		८
११३११	१२२	७		१०
X७३३३१॥	२७४	३		२०

सारिणी २ (अ) - सेमिटिक और ब्राह्मी के अंक

	हिएरोग्लिफिक	फिनिशियन	हिएरेटिक	डेमोटिक	अशोक के अन्तर्लेख	नानाघाट का अन्तर्लेख	कुषाणों के अन्तर्लेख	क्षत्रपों और आध्रों के अन्तर्लेख
१	𑀓	I	𑀓	𑀓		-	-	𑀓
२	𑀔	II	𑀔	𑀔		=	=	=
३	𑀕	III	𑀕	𑀕				
४	𑀖	𑀖	𑀖	𑀖	+	𑀖	𑀖	𑀖
५	𑀗	𑀗	𑀗	𑀗	६२		𑀗	𑀗
६	𑀘	𑀘	𑀘	𑀘		𑀘	𑀘	𑀘
७	𑀙	𑀙	𑀙	𑀙		𑀙	𑀙	𑀙
८	𑀚	𑀚	𑀚	𑀚		𑀚	𑀚	𑀚
९	𑀛	𑀛	𑀛	𑀛		𑀛	𑀛	𑀛
१०	𑀜	𑀜	𑀜	𑀜		𑀜	𑀜	𑀜

मार्गो २ (३) - मेमिटिक और ब्राह्मी के पक्ष

	हिन्दु-मिटिक	मिनिमियन	हिरेटिक	डेमोटिक	अशोक के अन्तर्लेख	नानागट का अन्तर्लेख	कुपानो के अन्तर्लेख	क्षामपो और आधो के अन्तर्लेख
११	॥	॥	॥					
१६	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५			० ० ०	४
२०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	०, ३, ५, ७	५ ५	५			५ ५ ५	
३०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
४०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
५०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
६०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
७०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
८०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
९०	॥ ॥ ॥ ॥ ॥	५ ५	५ ५	५			५ ५ ५	
१००	१	१	१	१			१	१

सारिणी २(स) — सेमिटिक और ब्राह्मी के लेख

	हिएरोग्लिफिक्	फिनिशियन	हिएरेटिक	डेमोटिक	अशोक का अन्तर्लेख	नानाघाट के अन्तर्लेख	कुषातो के अन्तर्लेख	क्षत्रपो और आध्रो के अन्तर्लेख
२००	११	(५॥) ॥॥	𑀧	𑀧	𑀧	𑀧	𑀧	𑀧
३००	१११		𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
४००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
५००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
६००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
१०००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
२०००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
३०००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧
४०००			𑀧	𑀧	𑀧	𑀧		𑀧

सारिणी ३ - गहरी के अक्षर

1	तीसरी शताब्दी ई. पू.	द्वितीय शताब्दी ई. पू.	पहली और द्वितीय शताब्दी ई. पू.	दूसरी शताब्दी ई. पू.	दूसरी से चौथी शताब्दी तक	चौथी शताब्दी
	अक्षरों के अन्वय	नामाश्रय के अन्वय	इसका अन्वय	अक्षरों और आधों के अन्वय	अक्षरों के अन्वय	अक्षरों के अन्वय
१	-	-	-	-	-	-
२	=	=	=	=	=	=
३	=	=	=	=	=	=
४	+	+	+	+	+	+
५						
६	६६	४	६६६६	४	४	४
७		७	७७७	७	७	७
८			७७७७७	७	७	७
९		७	७	७	७	७

सारिणी ४ - ब्राह्मो के अंक

	चौथी से छठी शताब्दी तक	पाँचवी शताब्दी	पाँचवी से छठी शताब्दी तक	छठवी से आठवी शताब्दी तक	आठवी से नवी शताब्दी तक
	गुप्तों, परिव्राजक, और उच्छकल्प के अन्तर्लेख	वाकाटकों के दानपट्ट	पल्लव और शालकायनों के दानपट्ट	बलभी के पट्ट	नेपाल के अन्तर्लेख
१	-		० ० ० ०	-	-
२	=		१ १ १ १	=	=
३	≡		२ २ २ २	≡	≡
४	५ ५ ५ ५		३ ३ ३ ३	५ ५ ५ ५	५ ५ ५ ५
५	६ ६ ६ ६	५	४ ४ ४ ४	६ ६ ६ ६	६ ६ ६ ६
६	७ ७ ७ ७	६	५ ५ ५ ५	७ ७ ७ ७	७ ७ ७ ७
७	८ ८ ८ ८	७	६ ६ ६ ६	८ ८ ८ ८	८ ८ ८ ८
८	९ ९ ९ ९	८	७ ७ ७ ७	९ ९ ९ ९	९ ९ ९ ९
९	० ० ० ०	९	८ ८ ८ ८	० ० ० ०	० ० ० ०

मारिगो ५ - वाह्यो के अक

हस्तलिपियाँ				
३वीं से ८वीं जमाने	१वीं से १०वीं जमाने	वावर द्वारा मकलित हस्तलिपियाँ	नेपाल से प्राप्त हस्तलिपियाँ	जैन हस्तलिपियाँ
गतावगियों के दानपत्र	प्रतिद्वारों के मन्त्रों और दानपत्र	विविध अन्तर्लक्ष्य व दानपत्र		
१			१ १ १	१ १
२		३	२ २ २	२ २
३		३ ३	३ ३ ३	३ ३
४		५ ५	४ ४ ४	४ ४ ४
५		५ ५	५ ५ ५	५ ५ ५
६		५ ५	६ ६ ६	६ ६ ६
७		५ ५	७ ७ ७	७ ७ ७
८		५ ५	८ ८ ८	८ ८ ८

सारिणी ६ - ब्राह्मी के अंक

	१० ^० से १० ^५ तक के अंक	२ री शताब्दी	१ ली और २ री शताब्दी	२ री शताब्दी	४ री से ४ थी शताब्दी	४ थी शताब्दी
	१० ^० से १० ^५ तक के अंक	नानाघाट का अन्तर्लेख	कुषाणों के अन्तर्लेख	क्षत्रियों और आध्रों के अन्तर्लेख	क्षत्रियों के सिक्के	जगज्यपेट के लेख और पटलवर्णों के दानपट्ट
१०		०	०	०	०	०
१०		०	०	०	०	०
२०		०	०	०	०	०
३०		०	०	०	०	०
४०		०	०	०	०	०
५०		०	०	०	०	०
६०		०	०	०	०	०
७०		०	०	०	०	०
८०		०	०	०	०	०
९०		०	०	०	०	०

मारिती ७ - गहरी के अंक

[illegible]

सारिणी ८ - ब्राह्मी के अंक

	९वीं से १०वीं शताब्दी	५वीं से ८वीं शताब्दी		हस्तलिपियाँ		
		प्रतिहारों के दानपट्ट	विविध दानपत्र और अन्तर्लेख	बाबर द्वारा संकलित हस्तलिपियाँ	नेपाल से प्राप्त बौद्ध हस्तलिपियाँ	जैन हस्तलिपियाँ
१०	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	अ	हं
२०		ॐ	ॐ	ॐ	अ	का
३०		ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा
४०		ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा
५०	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा
६०		ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा
७०		ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा
८०	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा
९०	ॐ	ॐ	ॐ	ॐ	अ	सा

सारिणी १० — वाह्यों के अंक

	८वीं से ९वीं शताब्दी	७वीं से ८वीं शताब्दी	९वीं से १०वीं शताब्दी	५वीं से ६वीं शताब्दी	हस्तलिपियाँ	
					बौद्ध हस्तलिपियाँ	जैन हस्तलिपियाँ
	नैपाल के अन्तर्लेख	गगावशियों के अन्तर्लेख	प्रतिहारों के दानपट्ट	विविध अन्तर्लेख		
१००	अ	७.७		१.५	म म म	म म म
२००	म म म			७४	म म म	म म म
३००	म म म			७४	म म म	म म म
४००	म म म			७४	म म म	म म म
५००	म म म			७४	म म म	म म म
६००	म म म			७४	म म म	म म म
७००	म म म			७४	म म म	म म म
८००	म म म			७४	म म म	म म म
९००	म म म			७४	म म म	म म म

	उत्ती मार्गदर्शिका	१० सी ओर २ सी मार्गदर्शिका	पुत्री मार्गदर्शिका
	मार्गदर्शिका की	मार्गदर्शिका के	वार्गदर्शिका के
१०००	T	99	9
२०००		99	
३०००		F	
४०००	H	9	
५०००	H		
६०००		97	97
७०००			
८०००	H		
९०००			

सारिणी १४ - नागरी अको की उत्पत्ति

१	-	ॠ	ॡ	ॢ	ॣ	।	॥
२	=	॥	॥	॥	॥	॥	॥
३	≡	≡	≡	≡	॥	॥	॥
४	+	५	५	५	५	५	५
५	५	५	५				
६	६	६					
७	७	७	७				
८	८	८	८	८	८		
९	९	९	९	९	९	९	९

सारिणी १५ - आधुनिक भारतीय लिपियों के अकों के आकार

	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
नागरी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
शारदा	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
टाकरी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
गुरुमुखी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
कैथी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
बंगला	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
मंथिनी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
उडिया	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
गजराती	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
मराठी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
तेलगु	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
उन्नत	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
मल्यालम	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
बर्मी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
सामी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
तिब्बती	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

—

1

1

2

2

1

अध्याय २

अंकगणित

१ सामान्य निरीक्षण

परिभाषा और विन्यास

पाटीगणित पर लिखे हुए हिंदू अंकों का अधिकार अंकगणित में सम्बन्ध होता है। 'पाटीगणित' शब्द का अर्थ है 'लिखित गणना' (१) पाटी, और (२) गणित। अतएव इसका अर्थ है 'वह गणित जिसको करने में पाटी की आवश्यकता पड़ती है'। लोगों की धारणा है कि यह शब्द भारतवर्ष के अत्यन्त प्राचीन साहित्य में निकला है जो कि उत्तरी भारतवर्ष की एक प्राचीन भाषा थी। 'अत्यन्त की पाटी' के प्राचीनतम उल्लेख प्रयाग 'फार्व' और 'पट्ट' हैं, न कि 'पाटी'। 'पाटी' शब्द का प्रयोग अत्यन्त प्राचीन में प्रायः मात्र गतरी गतारी में आरम्भ हुआ। गणित में या कभी-कभी 'गणित' भी कहते हैं, इसी पाटी पर यह लिखा था जब लिखे जाते थे। इसके कुछ दिनों में 'पाटीगणित' के अर्थ में 'व्यवहार गणित' का प्रयोग किया गया, जिसमें जिस 'दीर्घादि' में, जिसमें 'अत्यन्त-गणित', कहने से पृथक् समझा जाता। यह शब्द अंकों या तरी में अत्यन्त ही 'पाटीगणित' और 'गणित' शब्दों का भी अर्थ में अत्यन्त ही निकट है। अंकों के अर्थ में यह शब्द अत्यन्त ही निकट है।

वेली, पलीट, और बहुत से अन्य लोगो को मदेह है कि हिन्दू गणित के पाटी शब्द की उत्पत्ति इस बात में निहित है कि पाटी का प्रयोग एवैकम के रूप में होता था। परन्तु इस अनुमान का कोई आधार नहीं है, क्योंकि भारतवर्ष में एवैकम के किसी प्रकार का उल्लेख नहीं मिलता।

ब्रह्मगुप्त के अनुसार पाटीगणित में बीस परिकर्म और आठ व्यवहार हैं। उनका कथन है

“गणक वही है जो सकलित से आरम्भ होनेवाले बीस परिकर्मों को तथा छाया में अन्त होनेवाले आठ व्यवहारों को पृथक्-पृथक् जानता है।”

पृथूदक स्वामी के अनुसार बीस परिकर्मों के नाम ये हैं (१) सकलित, (२) व्यवकलित, अथवा व्युत्कलित, (३) गुणन, (४) भागहार, (५) वर्ग, (६) वर्गमूल, (७) घन, (८) घनमूल, (९-१३) पाँच जातियाँ (अर्थात् पाँच प्रकार की मित्रों को सरल करने के नियम), (१४) त्रैराशिक, (१५) व्यस्त-त्रैराशिक, (१६) पचराशिक, (१७) सप्तराशिक, (१८) नवराशिक, (१९) एकादशराशिक, और (२०) भाण्ड-प्रति-भाण्ड। आठ व्यवहारों के नाम ये हैं (१) मिश्रक-व्यवहार, (२) श्रेढी-व्यवहार, (३) क्षेत्र-व्यवहार, (४) खात-व्यवहार, (५) चिति व्यवहार, (६) काकचिक-व्यवहार, (७) राशि-व्यवहार, और (८) छाया-व्यवहार।

उपर्युक्त परिकर्मों में से पहले आठ परिकर्मों को महावीर और परवर्ती लेखकों ने मौलिक माना है। द्विगुणीकरण और अर्धोकरण के परिकर्म, जिन्हें मिश्र, यूनान, और अरबवालों ने मौलिक माना है, हिन्दू गणित के ग्रंथों में उपलब्ध नहीं है। ये परिकर्म उन लोगों के लिए महत्त्वपूर्ण थे जो दशमलव पद्धति में अनभिज्ञ थे। भारतीय ग्रंथों में, जो सब के सब दशमलव पद्धति का प्रयोग करते हैं, उनका अभाव है।

उपलब्ध ग्रंथ

उपलब्ध ग्रंथों में से निम्नलिखित केवल पाटीगणित से सम्बन्ध रखते हैं वक्षाली हस्तलिपि (ल० ३०० ई०), श्रीवरकृत पाटीगणित और त्रिशतिका (ल० ७५० ई०), गणित मार सग्रह (ल० ८५० ई०) गणित-तिलक (१०३९ ई०), लीलावती (११५० ई०), गणित-कौमुदी (१३५६ ई०) और मुनीश्वर

वृत्त पाटीमार (१६५८ ई०)। इन ग्रंथों में उपर्युक्त तीस परिक्र्मा और आठ व्यवहारों का वर्णन है। सूत्रों के साथ साथ उनके प्रयोग को समझाने के लिये उदाहरण भी दिए गये हैं।

इन ग्रंथों के अनन्तरित ज्योतिष के सिद्धान्त ग्रंथों में भी गणित का एक प्रकरण रहता है। पहले पहल आर्यभट्ट प्रथम (४९९ ई०) ने आर्यभटीय नामक अपने सिद्धान्त में गणित सम्बन्धी एक अध्याय सम्मिलित किया था। ब्रह्मगुप्त ने इस ग्रन्थ में आर्यभट्ट का अनुकरण किया, और तत्पश्चात् सिद्धान्त ग्रंथों में गणित पर एक अध्याय रखने की परम्परा सी हो गयी। पहले के सिद्धान्तों में यह विशेषता नहीं है। उदाहरणतः, सूर्य सिद्धान्त में गणित में सम्बन्ध रखनेवाला कोई अध्याय नहीं है। यही बात वासिष्ठ, पैतामह और रोमक सिद्धान्तों के लिए भी सत्य है। भास्कर प्रथम और शङ्कर ने भी जो आर्यभट्ट के प्रधान अनुयायी हैं अपने ज्योतिष-ग्रंथों में गणित को स्थान नहीं दिया है कदाचित् इसलिए कि उनके ग्रंथ तद्ग्रन्थ, सिद्धान्त नहीं।

पैतृक और अध्यापन

जाती थी। अक बूल पर या तो उँगली के अग्रभाग में अथवा लकड़ी की नुकीली कील से लिखे जाते थे। ज्यो-ज्यो गणना बढ़ती थी अनावश्यक अक मिटा दिये जाते थे। कभी-कभी पाटी पर खडिया के टुकड़े से भी लिखते थे। गणना करने में विद्यार्थी पद-पद पर प्रयुक्त सूत्र का उच्चारण करता था, शिक्षक इसकी देख-भाल करता था और अशुद्धि होने पर विद्यार्थी की सहायता करता था। जब विद्यार्थी अपनी पुस्तक में दिये हुए प्रश्नों को हल करने में पर्याप्त निपुण हो जाता था, तब शिक्षक उसे अन्य प्रश्न करने को देता था। प्रत्येक पेगेवर शिक्षक के पास ऐसे चुने हुए प्रश्नों का भांडार होता था जो या तो उसके स्वयं बनाये हुए होते थे अथवा अन्य स्रोतों से संग्रहीत होते थे। इस अवस्था में पहुँचने पर विद्यार्थी मरल सूत्रों की उपपत्ति समझने लगता था। जब विद्यार्थी ऐसी अवस्था में पहुँच जाता था, तब शिक्षक उसे अधिक कठिन सूत्रों की उपपत्ति बताना था।

उपर्युक्त विवरण से ज्ञात होगा कि शिक्षण की यह रीति इस वान में दोषपूर्ण थी कि पहली दो अवस्थाओं में अध्ययन का काम विष्कुल यत्रवन् होता था। जो विद्यार्थी अध्ययन की तीनों अवस्थाओं को पूरा नहीं करता था वह कण्ठस्थ किये हुए सूत्रों को प्रयोग करने के अतिरिक्त प्रायः कुछ नहीं जानता था, और प्रयुक्त सूत्रों की उपपत्ति से अनभिज्ञ होने के कारण, उनको प्रयोग करने ममत्र अशुद्धियाँ करने को बाध्य होता था। हम यहाँ बताना चाहते हैं कि बहुत कम शिक्षक ऐसे होते थे जो शिक्षण की सब अवस्थाओं में विद्यार्थी का पथ-प्रदर्शन कर सकते थे, अतएव उत्साही विद्यार्थी को, जिसे आगे बढ़ने की इच्छा होती थी, किसी विद्या के केन्द्र को अथवा किसी सुप्रसिद्ध विद्वान् के पास अध्ययन के लिए जाना पड़ता था।

गणित मन्त्रों के कठिन विषय है और सदा से ही ऐसा रहा है, और चूँकि उच्च गणित का ज्ञान आर्थिक लाभ का नहीं हो सकता था अतएव बहुत कम लोग मन लगा कर इसका अध्ययन करते थे। तथापि भारतवर्ष में हिन्दुओं के धार्मिक कृत्यों में कुछ गणित और ज्योतिष की आवश्यकता पड़ती थी। इसके अतिरिक्त प्राचीन काल से कुछ लोग सदैव ऐसे ही रहे हैं जिनका धर्म भविष्य-कथन था। ये लोग गणक या ज्योतिषी कहलाते थे और अपने भक्तों को अपनी विद्या से प्रभावित करने के लिए कुछ गणित और ज्योतिष का ज्ञान रखते थे। इसमें विदित होगा कि किसी हृद तक गणित का अध्ययन भारतवर्ष में प्रायः सभी स्थानों में होता था। परन्तु जैसा हमेशा होता है, कुछ विद्यार्थियों को इस विषय में विशेष अनुराग

हुआ, उन्होंने उन विषय का पूरा अध्ययन किया और ग्रंथों पर भाष्य लिखे अथवा स्वतंत्र ग्रंथों का निर्माण किया।

गणित की अवनति

यह सब तभी हुआ जब देश में सुख और शांति थी। जब विदेशी आक्रमणा, आभ्यन्तरिक युद्ध तथा अयोग्य शासन व्यवस्था ने देश में शांति का वातावरण भंग हुआ, गणित और वस्तुतः सभी विज्ञानों का अध्ययन स्थिर पड़ गया। अ-वेस्नी, जिसने उत्तर-पश्चिम भारतवर्ष का भ्रमण उस काल में किया था जब "हमा" के उद्भव से किये गये शफगाना के अनेक आक्रमणों के कारण देश में अमान्ति व्याप्त थी। जिकायन करता है कि उसे एक भी ऐसा पंडित नहीं मिला जो उसे भारतीय गणित के सिद्धान्तों से अवगत कराता। प्रद्युम्न अ-वेस्नी की परिचित विचित्र थी, क्योंकि कोई भी आदरणीय पंडित विदेशी व्यक्ति की विजयता उस जा आक्रमणकारियों की देवमन्दिर के दृष्टनेवालों के वर का रहा था। तथापि यहाँ का तैयार न होता था भी इस पूरा विश्वास है कि पञ्जाब में उस समय यहाँ विद्वानों की पर्याप्त बहुत संख्या थी।

तथापि यह निश्चित है कि ग्राहवी शताब्दी के बाद भारतवर्ष में बहुत ही कम भाष्य पाये गए। प्राचीन ग्रंथों पर भाष्य अल्प लिखे गये और कुछ नवीन ग्रंथों की रचना भी हुई, परन्तु उन ग्रंथों में बहुत अथवा विषय सम्बन्धी कोई नया गुण नहीं था कि वह भारतीय द्वितीय के प्रयोगों का परिणाम नव ज्ञानों का अपने विषयों के प्रामाणिक ग्रंथ मान जा सके। अतः हमें समझना पड़ेगा।

मानिक पश्चिम

करने की आधुनिक विधि और वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल निकालने के नियमों का वर्णन मनी ग्रन्थों में मिलता है।

यद्यपि उपर्युक्त मौलिक परिकर्मों के केवल अन्यन्त मद्दिष्ट विवरण उपलब्ध है, तो भी इन परिकर्मों को करने की प्राचीन विधियों का पुनर्निर्माण करना कठिन नहीं है, क्योंकि ये विधियाँ सुप्रसिद्ध हैं और पिछले १५०० वर्षों में या और भी अधिक काल से विद्यार्थियों को अविकल रूप में सिखायी जा रही हैं। आज भी जो विद्यार्थी आधुनिक स्कूलों में न पढ़ कर मस्कृत पाठशालाओं में शिक्षा प्राप्त करते हैं इन परिकर्मों को प्राचीन पद्धति के अनुसार पाटी पर करते हैं। इन विधियों के विस्तृत विवरण पृथक् स्वामी, और भास्कर द्वितीय आदि द्वारा लिखे हुए प्राचीन ग्रन्थों के भागों में भी मिलते हैं।

जैसा ऊपर कह आये हैं, गणना का कार्य पृथ्वी पर अथवा पाटी पर धूल बिछा कर किया जाता था।^१ कभी-कभी खडिया के टुकड़े में पाटी पर लिख कर भी गणना की जाती थी। परन्तु चकि लिखे हुए अक आकार में बड़े होते थे, अतएव पाटी पर अको की बहुत सी पक्तियाँ नहीं आ पाती थी। अतएव अनावश्यक अको को मिटा देने की प्रथा थी। परिकर्मों का विस्तृत विवरण देने समय, आगे उदाहरण द्वारा इसका स्पष्टीकरण किया जायगा।

प्राचीन काल से ही हिन्दू गणितज्ञ इस बात को मानते रहे हैं कि गणित के सब परिकर्म मूलतः दो परिकर्मों—सकलित और व्यवकलित—पर आश्रित हैं। इस सम्बन्ध भास्कर प्रथम का निम्नलिखित कथन है

“यह गणित यद्यपि चार (प्रकारों) में व्याप्त है, (मूलतः) दो प्रकार का है। वे दो प्रकार हैं—वृद्धि और ह्रास। जोड़ वृद्धि है, और घटाना ह्रास है। इन्हीं दो भेदों से सम्पूर्ण गणित व्याप्त है। कहा भी गया है—

‘गुणन और गत’ जोड़ के भेद है, भाग और गतमूल^२ अन्तर^३ के भेद कह गये हैं। इस प्रकार सम्पूर्ण गणित-शास्त्र को वृद्धि और ह्रास में व्याप्त देख कर (वस्तुतः) उसके दो ही भेद मनाना चाहिए।”

^१ उदाहरणतः, ६ का ७वाँ गत ६ है।

^२ उदाहरणतः ६ का ७वाँ गतमूल ७ है।

^३ देखिए भास्कर प्रथम का आर्यभटीय-भाष्य, गणित-पाद की भूमिका।

सकलित

२ सकलिन (जोड़ना)

पञ्चभाषा

आयभट द्वितीय (१५० ई०) ने मकलित की निम्न परिभाषा दी
 "ब्रह्म की सम्प्राप्तियों के एकीकरण को मकलित कहते हैं।"

मकड़ित के अथ में निम्नलिखित गठनों का सामान्य रूप में प्रयुक्त किया है

सकलन, मिश्रण, सम्मेलन, प्रक्षेपण, मण्डोजन, युक्ति, योग, और ३
कुत्र केवला न सकलित शब्द को 'श्रेणीकल' के अर्थ में प्रयोग वि
षय (अर्थात् क्रिया)

गणित और ज्योतिष के सब ग्रंथों में संकलित करने की रीति के संवर्द्धित मान लिया गया है। तो भी बाद की कुछ प्रारम्भिक पुस्तकों का अधिक विवरण मिलता है। उदाहरणतः भास्कर द्वितीय ने अपनी दशम में निम्न कथन किया है,

“अको को अपने अपने स्थानों के अनुसार नम मैं जयवा उन्नम न
चाहिए।”

प्रम विधि

सकारित की उपर्युक्त क्रम विधि में पहले समझाये के आधुनिक रीति
उप-नीचे लिखत ये औ-तब सबसे नीचे (उप-) वाली समझा के नीचे
एक-निज-समा-नीचत ये जगहों नीचे (उप-) समझा-समा-ज

पहले इकाई के अको को जोड़ लिया जाता था, इस प्रकार योगफल की इकाई-वाला अंक प्राप्त होता था। इसके बाद दहाईवाले अंक जोड़े जाते थे, और आये हुए जोड़ में क्षैतिज रेखा के नीचे लिखी हुई दहाई को (यदि होती थी तो) जोड़ते थे, इस प्रकार योगफल का दहाईवाला अंक प्राप्त होता था। इसके बाद इसी प्रकार क्रम से सैकड़े, हजार आदि के अंक जोड़े जाते थे। एक प्रकारान्तर यह भी था कि जोड़ी जानेवाली मन्त्रों में बड़ी मन्त्रों में ऊपर लिखी जाती थी और इस मन्त्रों के अको को मिटा-मिट्टा कर योगफल के अंक लिखे जाते थे।¹

उत्क्रम विधि

उत्क्रम विधि में पहले अन्तिम (विलकुल बायी ओर) वाले स्थान के अंक जोड़ कर क्षैतिज रेखा के नीचे लिखे जाते हैं। उसके बाद क्रमशः दाहिनी ओर के स्थानों के अंक जोड़े जाते हैं। आंशिक योगफलों के अंक, आवश्यकता पड़ने पर, अगले स्थान के अको को जोड़ने के पश्चात् शुद्ध कर लिये जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि अन्तिम स्थान के अको का जोड़ १२ होता है तो १२ को क्षैतिज रेखा के नीचे इस प्रकार स्थापित करते हैं कि अंक २ अन्तिम स्थान के ठीक नीचे पड़ता है। इसके बाद यदि अगले स्थान के अको का जोड़ १३ होता है तो अंक ३ को जुड़े हुए अको के स्थान के ठीक नीचे लिखते हैं और १ को बायी ओर के (पहले ही से लिखे हुए) अंक २ में जोड़ देते हैं (अर्थात् २ को मिटा कर उसके स्थान में ३ लिख देते हैं)।²

¹ सुधाकर द्विवेदी, गणित का इतिहास, बनारस, १९१०, पृ० ६०।

² मनोरजन नामक टीका में संकलित की प्रक्रिया निम्न प्रकार से समझायी गयी है।

उदाहरण। २, ५, ३२, १६३, १८, १०, और १०० का योग ज्ञात करो।

इकाइयों का जोड़ २, ५, २, ३, ८, ०, ०	२०
दहाइयों का जोड़ ३, ६, १, १, ०	१४
सैकड़ों का जोड़ १, ०, ०, १	२
कुल जोड़	३६०

टीकाकार ने क्रम और उत्क्रम विधियों को एक साथ समझाने के लिए क्षैतिज क्रम का प्रयोग किया है। परन्तु इसका कभी प्रयोग नहीं हुआ।

अव्यक्ते उर्ध्वार्धर रेखा नीचकर स्थानों का पृथक्करण कर देते थे, परन्तु हिन्दू लोग ऐसा नहीं करते थे।^१

३ व्यवकलित (घटाना)

परिभाषा

आग्नेय द्वितीय ने व्यवकलित की निम्न परिभाषा दी है

"सवधन में से कुछ घटान को 'व्यवकलित' कहते हैं, (घटाने पर) जो वचना है उसे 'शेष' कहते हैं।"

व्यवकलित के अर्थ में निम्नलिखित शब्दों का भी प्रयोग किया गया है व्यर्कलित, व्युत्कलन, शोधन, पानन, विप्रोष, इत्यादि।

जिस वस्तु में कोई सम्पत्ति घटाई जाती है उसे सवधन या विप्रोष्य कहा गया है, और जो वस्तु घटाई जाती है उसे विप्रोषक कहा गया है। घटाने में बची हुई वस्तु को शेष अथवा अन्त कहा गया है।

ध्यान

भास्कर द्वितीय ने व्यवकलित के लिए निम्नलिखित नियम दिया है

'अथोक्तः अपनः अपने स्थानों के अनुसार उस में जो कुछ घटाना चाहिये।'^२

धन (या अनन्य) विधि

है, और शेष ग्रहण किया जाता है, और वह १० आगेवाले स्थान से बढ़ाया जाता है। इस प्रकार वह १० अंतिम सख्या तक तब तक लिया जाता है जब तक उसका पूर्ण रूप से ह्रास नहीं हो जाता। दूसरे शब्दों में ९ तक के अंक एक स्थान लेते हैं, स्थान का अन्तर पडना १० से आरम्भ होता है, अतएव ज्ञात किया जाता है कि 'सख्या में कितनी दहाइयाँ हैं, और इसलिए वह अंक जो अपने स्थान में नहीं घटाया जा सकता वह आगे की दहाई में बढ़ाया जाता है, और शेष का ग्रहण किया जाता है।'

उपर्युक्त विधि में घटाने का क्रम डकार्ड में आरम्भ होता है, अतएव इसे क्रम विधि कहते हैं।

उत्क्रम विधि

उत्क्रम विधि भी क्रम विधि के मद्दग है। अन्तर केवल इतना है कि इसमें घटाने का क्रम सर्वधन के अन्तिम स्थान से आरम्भ किया जाना है, और पहले के आंशिक शेष, आवश्यकता पडने पर, बाद में शुद्ध कर लिये जाते हैं। इस विधि का प्रयोग पाटी पर ही किया जा सकता है, क्योंकि अंकों का मिटाना और शुद्ध करना पाटी पर ही सम्भव है। यह विधि क्रम-विधि से मरल समझी जाती थी, और यही विधि सामान्य रूप में भारतवर्ष में प्रचलित थी।'

४ गुणन

परिभाषा

गुणन शब्द अत्यंत प्राचीन है, क्योंकि इसका प्रयोग वैदिक साहित्य में मिलता है। गुणन के अर्थ में हनन, वध, और क्षय इत्यादि शब्दों का भी प्रयोग हुआ है। इन शब्दों का शाब्दिक अर्थ 'वध करना' अथवा 'नष्ट करना' है। प्रतीत होता है कि इन शब्दों का प्रचार दशमलव स्थान-मानवाली सख्याओं को गुणा करने के नवीन नियमों के बन जाने के बाद हुआ, क्योंकि नवीन नियम के अनुसार गुण्य राशि के अंक एक-एक करके मिटा दिये जाते थे और उनके स्थान में गुणनफल के अंक लिख दिये जाते थे।^१ हनन शब्द के पर्यायवाचक शब्दों का प्रयोग आर्यभट

^१ गंगाधर के अनुसार घटाने में उत्क्रम विधि सरल पडती है और जोड़ में क्रम विधि।

^२ आगे पृ० १२६ में कपाट-सन्धि गुणन की विधि का वर्णन दिया गया है।

प्रथम', गृह्यसूत्र, श्रीधर, और परवर्ती लेखकों के ग्रंथों में मिलता है। ब्रह्माली हस्तलिपि में भी इन शब्दों का प्रयोग हुआ है।^१

'अभ्यास' शब्द का प्रयोग जोड़ और गुणन दोनों अर्थों में शुल्ब ग्रंथों (८००-४०० ई० पू०) में मिलता है। इसमें विदित होता है कि प्राचीन काल में गुणन करने की प्रक्रिया अनेक बार जोड़ने पर आधारित थी। गुणन के अर्थ में ब्रह्माली हस्तलिपि में प्रयुक्त शब्द 'परस्परकृत' ('एकत्र करना') स्पष्टतः प्राचीन काल का अवशेष है। इस प्राचीन शब्दावली में सिद्ध होता है कि प्राचीन काल में गुणन की परिभाषा थी—'जोड़ की वह प्रक्रिया जिसमें गुण्य को गुणक मन्त्रा तुल्य बार लिख कर जोड़ा जाता हो।' यह परिभाषा भास्कर प्रथम के आर्यभटीय-भाष्य में मिलती है। गीतावली के टीकाकारों में भी गुणन की यही परिभाषा दी है।^२ 'भास्कर प्रथम' ने निम्नलिखित शब्दों को गुणन शब्द के पर्यायवाचक माना है—स्वर्ग, पान, हति, और उद्वतना।

जिस मन्त्रा को गणा किया जाता है उसे 'गुण्य' कहते हैं और जिस मन्त्रा में गणा किया जाता है उसे 'गुणक' अथवा 'गुणकार' कहते हैं। गुणा करने में जो मन्त्रा प्राप्त होती है उसे 'गणनफल' अथवा 'प्रत्यन्तर' कहते हैं। ये शब्द गणित में अभी उपलब्ध ग्रंथों में मिलते हैं।

गणन की विधियाँ

आर्यभट्ट प्रथम ने गणन की सामान्य विधियाँ का बतान नहीं किया है, ब्रह्माली हस्तलिपि का वह उतनी मात्र और सुस्पष्ट नहीं कि उसके मिथ्या-मार्ग निवेदन उचित नहीं था। तथापि ब्रह्माली ने मात्रा-पर-मिथ्या-मार्ग के गणिता-मार्ग में कुछ विधियाँ के नाम दिये हैं और उनका वर्णन भी किया है।

'गणकार में जितने (स्थान पद) हैं उतनी बार मन्त्र का (पहराया)।

^१ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लोक १६, २६ इत्यादि।

ब्रह्माली हस्तलिपि, पृ-९५ (८)।

^२ ब्रह्माली हस्तलिपि पत्र ३ (८)।

^३ शोलरष हिन्दू अलजेबरा पृ० १३३।

आर्यभटीय गणितपाद १ (भाष्य)।

पदों का अनुवाद शोलरष ने हस्तलिपि के भाष्य (हस्तलिपि भाष्य) द्वारा किया है।

गोमूत्रिकावत् (एक-एक स्थान हटा कर) लिखो, उसके बाद उनको (गुणकार के संगत स्थान खडो में) गुणा करके एक में जोड़ दो। इस प्रकार गुणनफल की प्राप्ति होगी।

अथवा, गुणकार के खडों की जो समस्या हो उतनी बार गुण्य को (अलग-अलग ऊपर नीचे) लिखो (और जोड़ दो। इन जोड़ों को परिस्थिति के अनुसार, आरम्भ में जोड़ दो अथवा गुणा करो। इस प्रकार भी गुणनफल की प्राप्ति होगी)।

“(अथवा) गुण्य को गुणकार और किसी डाट समस्या के योग अथवा अन्तर में गुणा करो, और गुणनफल में डाट और गुण्य के गुणनफल को घटा अथवा जोड़ दो।”^१

इस प्रकार ब्रह्मगुप्त ने गुणन की चार विधियों का वर्णन किया है (१) गोमूत्रिका, (२) खण्ड, (३) भेद, और (४) डाट। कपाट मन्वि नामक सामान्य एवं सुप्रसिद्ध विधि को उन्होंने छोड़ दिया है।

श्रीधर ने गुणन की निम्नलिखित विधियों का वर्णन किया है (१) कपाट-मन्वि, (२) तत्स्य, (३) रूपविभाग, और (४) स्थानविभाग। महावीर ने भी इन्हीं चार की चर्चा की है। आर्यभट्ट द्वितीय ने केवल कपाट-मन्वि नामक सामान्य विधि का वर्णन किया है। भास्कर द्वितीय ने इन चार विधियों के अतिरिक्त ब्रह्मगुप्त के डाटगुणन का भी वर्णन किया है। भास्कर द्वितीय द्वारा वर्णित पाँच विधियों का वर्णन पहले के लेखक श्रीपति ने अपने सिद्धान्त शेखर में किया था। गणेश देवज^२ (ल १५४५ ई०) ने ‘गेलोसिया’ नामक विधि को कपाट-मन्वि

^१ खड का अर्थ है वे समस्याएँ जिनका योग गुणनफल दी हुई समस्या के तुल्य हो।

^२ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, अध्याय १२, श्लोक ५५।

^३ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, अध्याय १२, श्लोक ५६। कोलब्रुक (पूर्वावृत्त ग्रंथ, पृ० ३२०) का विचार है कि यह नियम उस अवस्था में शुद्ध गुणनफल निकालने के लिए है जब भूल से गुण्यराशि कुछ छोटी या बड़ी ले ली गयी हो। यह विचार ठीक नहीं है।

^४ लीलावती पर टीका (एशियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल, कलकत्ता, हस्तलिपि न० १ बी ६), पृ० १७, १८। इस ग्रंथ में केवल दो विधियाँ दी गयी हैं (१) कपाटसधि और (२) कपाटसधि (ब)।

महावीरने कपाटसवि नाम की विधि का उल्लेख किया है परन्तु उसका विवरण नहीं दिया है', और भास्कर द्वितीय ने इसे समझाया है परन्तु उसका नाम नहीं दिया है। नारायण ने कपाटसवि का नाम भी दिया है और उसका वर्णन भी किया है जो प्रायः शब्दशः श्रीवर वाले वर्णन के अनुरूप है।

इस विधि की विशेषताएं ये हैं (१) गुण्य और गुणकार के सापेक्ष स्थान और (२) गुण्य के अको का मिटाना और उनके स्थान में गुणनफल के अको का स्थापन। पहली विशेषता के कारण इस विधि का नाम कपाट-सवि पडा और दूसरी विशेषता के कारण गणित के ग्रंथों में मिलनेवाले हनन, वव, इत्यादि शब्दों का आविर्भाव हुआ। ये शब्द आर्यभट्ट प्रथम और ब्रह्मगुप्त के ग्रंथों में तथा वक्षाली हस्तलिपि में मिलते हैं जिससे निश्चित रूप से सिद्ध होता है कि यह विधि ३०० ई० के लगभग भारतवर्ष में ज्ञात थी।

निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से कपाट-मवि की क्रम और उन्क्रम दोनों विधियाँ समझ से आ जायँगी।

क्रम (अनुलोम) विधि

प्रतीत होता है कि इस विधि का अधिक प्रचार नहीं था, क्योंकि ग्यारहवीं शताब्दी के बाद उसका कोई उल्लेख नहीं मिलता। इसका अन्तिम बार उल्लेख श्रीपति ने किया है।

उदाहरण । १३५ को १२ से गुणा करो ।

पहले इन सख्याओ को पाटी पर निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं

गुणक १२

गुणप्र १३५

उसके बाद गुण्य के इकाइवाले अंक (५) को गुणक के अंको से गुणा करते हैं। इस प्रकार $५ \times २ = १०$, ० को २ के नीचे लिखते हैं और १ को एक स्थान बायी ओर ले जाते हैं।^१ इसके बाद $५ \times १ = ५$, इसमें (आगे ले गये अंक)

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ६।

³ ये उदाहरण लीलावती की टीकाओ, विशेषकर मनोरजन नाम की टीका, पर आधारित है। मनोरजन में ये विधियाँ अधिक विस्तार में समझायी गयी हैं।

^१ नया विद्यार्थी कदाचित् इसे पाटी पर अन्यत्र लिख लेता था ।

१ को जोड़ने पर ६ प्राप्त होता है। (पाटी पर लिखे हुए) ५ की अब आवश्यकता न होने से उसे मिटा देते हैं और उसके स्थान में प्राप्त ६ को लिख देते हैं। इस प्रकार पाटी पर अब निम्नलिखित सर्राएँ होती हैं

१२

१३६०

अब गणक को एक स्थान बायी ओर हटाने हैं।

१०

१३६०

अब ३ को गणक से अंको से गुणा करने हैं। इसका विवरण यह है $३ \times २ = ६$, अब ६ को ० के नीचे लिखे हुए ६ से जोड़ने पर १२ प्राप्त होता है। ६ को मिटाकर उसके स्थान में ० लिख देने हैं। १ को आगे ले जाने हैं। इसके बाद $३ \times १ = ३$, ३। (आगे ले जाया गया) $१ = ४$ । ३ को मिटाकर उसके स्थान में ८ लिख देने हैं। अब प्रसार ३ का १० से गुणा हो जाने पर १२ को फिर एक स्थान बायी ओर हटाकर लिखने हैं। अब पाटी पर निम्नलिखित सर्राएँ होंगी हैं।

१०

१८००

महावीरने कपाटमवि नाम की विधि का उल्लेख किया है परन्तु उसका विवरण नहीं दिया है^१, और भास्कर द्वितीय ने इसे समझाया है परन्तु इसका नाम नहीं दिया है। नारायण ने कपाटसवि का नाम भी दिया है और उसका वर्णन भी किया है जो प्रायः शब्दशः श्रीधर वाले वर्णन के अनुरूप है।

इस विधि की विशेषताएं ये हैं (१) गुण्य और गुणकार के सापेक्ष स्थान और (२) गुण्य के अको का मिटाना और उनके स्थान में गुणनफल के अको का स्थापन। पहली विशेषता के कारण इस विधि का नाम कपाट-मवि पड़ा और दूसरी विशेषता के कारण गणित के ग्रंथों में मिलनेवाले हनन, वध, इत्यादि शब्दों का आविर्भाव हुआ। ये शब्द आर्यभट्ट प्रथम और ब्रह्मगुप्त के ग्रंथों में तथा बखाली हस्तलिपि में मिलते हैं जिससे निश्चित रूप से सिद्ध होता है कि यह विधि ३०० ई० के लगभग भारतवर्ष में ज्ञात थी।

निम्नलिखित उदाहरणों^२ की सहायता से कपाट-मवि की क्रम और उन्क्रम दोनों विधियाँ समझ में आ जायेंगी।

क्रम (अनुलोम) विधि

प्रतीत होता है कि इस विधि का अधिक प्रचार नहीं था, क्योंकि ग्यारहवीं शताब्दी के बाद उसका कोई उल्लेख नहीं मिलता। इसका अन्तिम बार उल्लेख श्रीपति ने किया है।

उदाहरण। १३५ को १२ से गुणा करो।

पहले इन सख्याओं को पाटी पर निम्नलिखित प्रकार में लिखते हैं

गुणक १२

गुण्य १३५

उसके बाद गुण्य के इकाइयों के अंक (५) को गुणक के अको से गुणा करते हैं। इस प्रकार $५ \times २ = १०$, ० को २ के नीचे लिखते हैं और १ को एक स्थान बायीं ओर ले जाते हैं।^३ इसके बाद $५ \times १ = ५$, इसमें (आगे ले गये अंक)

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ६।

^२ ये उदाहरण लीलावती की टीकाओं, विशेषकर मनोरजन नाम की टीका, पर आधारित हैं। मनोरजन में ये विधियाँ अधिक विस्तार में समझायी गयी हैं।

^३ नया विद्यार्थी कदाचित् इसे पाटी पर अन्यत्र लिख लेता था।

१ को जोड़ने पर ६ प्राप्त होता है। (पाटी पर लिखे हुए) ५ की अब आवश्यकता न होने से उसे मिटा देते हैं और उसके स्थान में प्राप्त ६ को लिख देते हैं। इस प्रकार पाटी पर अब निम्नलिखित सख्याएँ होती हैं

१२

१३६०

अब गुणक को एक स्थान बायी ओर हटाते हैं।

१२

१३६०

अब ३ को गुणक के अंको से गुणा करते हैं। इसका विवरण यह है $३ \times २ = ६$; इस ६ को २ के नीचे लिखे हुए ६ में जोड़ने पर १२ प्राप्त होता है। ६ को मिटाकर उसके स्थान में २ लिख देते हैं। १ को आगे ले जाते हैं। इसके बाद $३ \times १ = ३$, $३ +$ (आगे ले जाया गया) $१ = ४$ । ३ को मिटाकर उसके स्थान में ४ लिख देते हैं। इस प्रकार ३ का १२ से गुणा हो जाने पर १२ को फिर एक स्थान बायी ओर हटाकर लिखते हैं। अब पाटी पर निम्नलिखित सख्याएँ होती हैं।

१२

१४२०

अब $२ \times १ = २$, $२ + ४ = ६$, ४ को मिटाकर उसके स्थान में ६ लिखते हैं। $१ \times १ = १$ को ६ के बायी ओर लिखते हैं। अब क्रिया समाप्त हो जाने के कारण, गुणक १२ को मिटा देते हैं और पाटी पर निम्नलिखित सख्या शेष रहती है

१६२०

इस प्रकार १२ और १३५ सख्याओं का 'हनन' हो गया और एक नयी सख्या १६२० प्रत्युत्पन्न हो गयी।^१

पाठक देखेंगे कि गुणक का स्थान और उसका चालन दो महत्वपूर्ण कार्य

^१ यही कारण है कि गुणन के अर्थ में हनन और इसी प्रकार के अन्य पर्याय-वाचक शब्दों का प्रयोग किया जाता था।

^२ अतएव गुणनफल को प्रत्युत्पन्न कहते थे।

करता है, अर्थात् (१) गुणक का अन्तिम स्थान इस बात को संकेत करता है कि गुण्य के किस अंक तक गुणा करना है, और (२) गुणक का स्थान इस बात को सूचित करता है कि गुणनफल को उसके नीचे लिखे हुए अंक में जोड़ना है।

कभी-कभी गुण्य के किसी अंक को गुणक में गुणा करने पर गुणनफल गुणक के अन्तिम स्थान से आगे निकल जाता है। ऐसी परिस्थिति में आगिक गुणनफल का अन्तिम अंक अन्यत्र लिख लिया जाता है। १३५ को ९० में (उपर्युक्त विधि में) गुणा करने पर पाठक को यह बात देख पड़ेगी।

नये विद्यार्थी को ऐसी परिस्थितियों में निम्नलिखित दो प्रकार की अशुद्धियाँ कर देने की सम्भावना रहती थी (१) अन्यत्र लिखे हुए अंक का अशुद्ध प्रयोग कर देने की, और (२) गुणक के अन्तिम स्थान के आगे लिखे हुए गुण्य के अंक को मिटा देने की। इन कारणों से इस विधि का अधिक प्रचार नहीं हुआ, और उत्क्रम विधि अधिक पसन्द की जाती थी।

उत्क्रम (विलोम) विधि :

उत्क्रम विधि के दो प्रकार दृष्टिगोचर होते हैं।

(अ) पहले में मख्याएँ निम्न प्रकार से लिखी जाती हैं।

गुणक	१२
गुण्य	१३५

गुणन का आरम्भ गुण्य के अन्तिम अंक से होता है। इस प्रकार $१ \times २ = २$, १ को मिटाकर उसके स्थान में २ लिखा जाता है, इसके बाद $१ \times १ = १$, यह १ उसके बायी ओर लिखा जाता है।^१ इसके बाद गुणक १२ को एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं। पाटी पर अब निम्न मख्याएँ होती हैं।

$$\begin{array}{r} १२ \\ १२३५ \end{array}$$

अब, $३ \times २ = ६$, ३ को मिटाकर उसके स्थान में ६ लिखते हैं। अब $३ \times १ = ३$ और $३ + २ = ५$, २ को मिटाकर उसके स्थान में ५ को लिखते हैं। इसके बाद

^१ अथवा प्रकारान्तर से: $१ \times १ = १$ और तब $१ \times २ = २$, इस प्रकार गुण्य में १ के स्थान में १२ हो जाता है, इत्यादि।

गुणक को पुन एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं। पाटी पर अब निम्न सख्याएँ होती हैं।

१२

१५६५

अब $५ \times २ = १०$, ५ को मिटाकर उसके स्थान में ० लिखते हैं। अब $५ \times १ = ५$, $५ + १ = ६$, $६ + ६ = १२$, ६ को मिटाकर उसके स्थान में २ रखते हैं, और १ को दहाई में ले जाते हैं अर्थात् ५ में जोड़ते हैं, इस प्रकार ५ को मिटाकर उसके स्थान में ६ लिखते हैं। पाटी पर अब निम्न सख्या होती है

१६२०

जो कि इष्ट गुणनफल है। दहाई में जोड़े जानेवाले अक पाटी पर अन्यत्र लिख लिये जाते हैं और उनका जोड़ हो चुकने पर मिटा दिये जाते हैं।

(व) हमारे में (गुणक के अको द्वारा) आशिक गुणनफल क्रम-विधि से किया जा सकता है। तथापि ऐसा प्रतीत होता है कि आशिक गुणनफल उत्क्रम विधि में करने की परिपाटी थी। निम्न उदाहरण से यह विधि ममझ में आ जायगी। उदाहरण। ३२४ को ७५३ से गुणा करो।

गुणक और गुण्य निम्न क्रम में रखे जाते हैं।

गुणक

७५३

गुण्य

३२४

गुणन का आरम्भ गुणक के अन्तिम स्थान से होता है। $३ \times ७ = २१$, १ को गुणक ७ के नीचे रखते हैं और २ को उसके बायी ओर निम्न प्रकार से

७५३

२१ ३२४

उसके बाद $३ \times ५ = १५$, ५ को गुण्य ५ के नीचे रखते हैं और १ को बायी ओर रखे हुए १ में जोड़ देते हैं, अर्थात् १ को मिटाकर उसके स्थान में योगफल २ को लिखते हैं। अब पाटी पर निम्न सख्याएँ होती हैं

७५३

२२५३२४

अब $३ \times ३ = ९$, गुण्य के ३ को मिटाकर उसके स्थान में ९ को लिखते हैं।

७५३

२२५९२४

अब गुणक को एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं

$$७५३$$

$$२२५९२४$$

अब $७ \times २ = १४$, ४ को ७ के नीचेवाले ५ में और १ को ५ के बायी ओर के २ में जोड़ते हैं।

$$७५३$$

$$२३९९२४$$

अब $५ \times २ = १०$, इस १० को ५ के नीचेवाले अंको में जोड़ते हैं

$$७५३$$

$$२४०९२४$$

अब $२ \times ३ = ६$, इस ६ को ३ के नीचेवाले ० को मिटा कर उसके स्थान में रखते हैं

$$७५३$$

$$२४०९६४$$

इसके बाद गुणक को पुन एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं।

$$७५३$$

$$२४०९६४$$

अब ४ को क्रमानुसार गुणक के ७, ५ और ३ से गुणा करते हैं, पहले दो गुणनफलों को क्रमश ७ और ५ के नीचे लिखी मख्याओं में जोड़ते हैं और अन्तिम को ३ के नीचेवाले ४ को मिटाकर उसके स्थान में लिखते हैं। इस प्रकार क्रम से निम्नलिखित सख्याएँ मिलती हैं।

(अ)

$$७५३$$

$$२४३७६४$$

(ब)

$$७५३$$

$$२४३९६४$$

(स)

$$७५३$$

$$२४३९७२$$

यही अन्तिम मख्या २४३९७२ इष्ट गुणनफल है।

जैसा पहले कहा जा चुका है, गुणक का स्थान और उसका चालन उपर्युक्त क्रिया में महत्वपूर्ण कार्य करता है। गुणक के अंक भी भ्रम-निवारणार्थ क्रम में एक

एक करके मिटा दिये जाते हैं, इस प्रकार परिस्थिति (अ) में ७ मिटा दिया जाता और परिस्थिति (ब) और (स) में क्रमशः ५ और ३ मिटा दिये जाते हैं।

उपर्युक्त विधि का निम्न प्रकारान्तर भी मिलता है^१

“गुण्य १३५, गुणक १२। गुणक को गुण्य के अन्तिम स्थान पर रखने पर

१२

१३५

‘अकाना वामतो गति’ नियम के अनुसार गुण्य के अन्तिम अंक १ को १२ से गुणा करते हैं। इसके अनन्तर १२ को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाते हैं

१२

१२३५

अब, गुण्य के उपान्तिम अंक ३ को १२ से गुणा करने पर निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

१२

१२६५

३

पुनः १२ को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाने पर

१२

१२६५

३

अब गुणक के इकाई के अंक ५ को गुण्य १२ से गुणा करने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है।

१२

१२६०

३६

अब गुणक को मिटाने पर निम्नलिखित सरयाएँ मिलनी हैं

^१ धृषाराम दंडवत् कृत लीलावत्युदाहरण, ऐशियाटिक सोसायटी आव
दंगल, बलबत्ता, हरतलिपि न० ३ एफ ११० ए।

१२६०

३६

जिन्हें यथास्थान जोड़ने पर १६२० मिलता है (जो इष्ट गुणनफल है) ।

पश्चिम में प्रवेश

गुणन की कपाट-सन्धि विधि अरब में प्रविष्ट की गयी थी जहाँ के लोगों ने हिंदुओं से दशमलव गणित सीखा था । इस विधि का प्रयोग अल-ख्वारिज्मी (८२५ ई०), अल-नसवी^१ (ल० १०२५ ई०), अल-हस्मर^२ (ल० ११७५ ई०), अल-कलसादी^३ (ल० १४७५ ई०) और अन्य बहुत से लेखकों के ग्रंथों में मिलना है । निम्न उदाहरण अल-नसवी के ग्रंथ से उद्धृत किया गया है । अल-नसवी ने इस विधि को 'अल-अमल अल-हिन्दी' तथा 'तारिक अल-हिन्दी' ("हिंदुओं की विधि") कहा है ।

उदाहरण । ३२४ को ७५३ में गुणा करना ।

४३

३४९

२४४७

२४४५० अतएव गुणनफल = २४३९७२ ।

३२४

७५३

७५३

७५३

यहाँ पर भी गुणक और गुण्य के स्थापन की विधि हिन्दू विधि के बिल्कुल अनुरूप है । गुणक का चालन भी उमी भाँति किया गया है । चूँकि क्रिया कागज पर की गयी है, इसलिए अकों को मिटाया न जाकर काट दिया गया है ।

यूरोप में मैक्सिमम प्लानुडेम के ग्रन्थ में भी उपर्युक्त विधि का विवरण मिलता है ।

^१ एफ वेल्के, १ (६), पृ० ४०७ ।

^२ एच. सूटर, विविधयोग्यैका मैथेमेटिका २ (३), पृ० १६ ।

^३ पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० १७ ।

गेलोसिया विधि

‘गेलोसिया’ नाम से प्रसिद्ध विधि का गणित-मञ्जरी (१६ वीं शताब्दी) में ‘कपाट-सधि विधि’ कह कर वर्णन किया गया है। गणेशदैवज्ञ कृत लीलावती-टीका में भी इसका वर्णन है। प्राचीन ग्रंथकारों ने कपाट सधि का वर्णन इतना स्थूल किया है कि उसके आधार पर यह कहना कठिन है कि गणेश द्वारा प्राचीन लेखकों की कपाट-सधि विधि को गेलोसिया विधि कहना कहाँ तक सगत है। हमारे मत में गणेश का यह नामकरण अशुद्ध है।^१

इस समय हम निश्चित रूप में नहीं कह सकते कि यह विधि हिन्दुओं का आविष्कार है अथवा अरबों की देन है जिन्होंने, कहा जाता है, १३वीं शताब्दी में इसका प्रयोग किया था।^२ यह विधि १४वीं शताब्दी के अरबी ग्रन्थों तथा तत्कालीन यूरोपीय ग्रन्थों में मिलती है। गणेश दैवज्ञ अपने समय के श्रेष्ठतम गणितज्ञों में से थे और यह तथ्य कि उन्होंने इस विधि को कपाट-सधि विधि कहा है प्रदर्शित करता है कि गेलोसिया विधि निस्सन्देह उनके समय के बहुत समय पहले में भारतवर्ष में प्रचलित थी।

इस विधि का केवल एक ही विवरण मिलता है जो इस प्रकार है: “गुण्य में जितने स्थान हो उतने (वर्गाकार) कोष्ठ खींचो और उनके नीचे उतने कोष्ठ खींचो जितने गुणक में स्थान हो। पहले कोष्ठ में, उसके नीचेवाले कोष्ठ में, तथा अन्य कोष्ठों में तिर्यक् रेखाएँ खींचो। गुण्य के प्रत्येक अंक को गुणक के अंकों में, जो एक के नीचे एक स्थापित है, गुणा करो, और गुणन से प्राप्त अंकों को कोष्ठों में रखो। तिर्यक् रेखाओं के दोनों ओर के अंकों का तिर्यक् योग करने पर गुणन-फल प्राप्त होता है यही कपाटसधि (गुणन) है।”^३

निम्नलिखित उदाहरण लीलावती पर गणेशदैवज्ञ कृत टीका में उद्धृत किया गया है

^१ हम इस विधि को कपाट-सधि (व) कहेंगे।

^२ पृ० १२६ पर दिया गया श्रीपति का उद्धरण।

^३ स्मिथ, इतिहास, भाग २, पृ० ११५।

^४ ट्टिराजात्मज गणेश की गणित-मञ्जरी से अनूदित।

१३५ को १२ से गुणा करना।

	१	३	५	
	<div>३</div>	<div>३</div>	<div>५</div>	१
	<div>२</div>	<div>६</div>	<div>१</div>	२
३	६	२	०	

तिर्यक्-गुणन विधि

श्रीधर, महावीर, श्रीपति तथा कुछ परवर्ती लेखकों ने इसे तत्स्थ विधि कहा है, परन्तु इन लोगों ने इस विधि का विवरण नहीं दिया है। श्रीधर केवल यही लिखते हैं कि 'अन्य (विधि) जिसमें गुण्य स्थिर रहता है तत्स्थ कहलाती है।' यह विधि बीजीय है और इसे बीजगणित के तिर्यक् गुणन अथवा वज्राभ्यास के सदृश बतलाया गया है।^१ गणेश (ल० १५४५ ई०) ने इसका वर्णन निम्न प्रकार से किया है

'गुणन की वह विधि जिसमें मख्याएं स्थिर रहती हैं' तत्स्थ कहलाती है। उसका विवरण यह है गुण्य और उसके नीचे गुणक लिखकर इकाई को इकाई से गुणा करो और गुणनफल को उसके नीचे स्थापित करो। इसके बाद इकाई को दहाई से और दहाई को इकाई से गुणा करो, दोनों को जोड़कर गुणनफल की पक्ति में दहाई के नीचे रखो। अब इकाई को सैकडे से, सैकडे को इकाई से और दहाई को दहाई से गुणा करो, और उन्हें जोड़कर पूर्ववत् (पक्ति में सैकडे के नीचे) लिखो, इसी प्रकार आगे शेष स्थानों को गुणा करो। इस प्रकार किया

^१ त्रिशतिका पृ० ३

^२ कोलब्रुक, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० १७१, फुटनोट ५।

^३ उस विधि के विपरीत जिसमें गुणक को एक-एक स्थान दाहिनी या बायीं ओर हटाते हैं।

करने पर पक्ति में रखी हुई सख्या गुणनफल होती है।^१ यह विधि ८वीं शताब्दी अथवा उसके पूर्व के हिन्दू गणितज्ञों को ज्ञात थी। यह विधि अरब पहुँची और वहाँ में इसका यूरोप में प्रवेश कराया गया, जहाँ पर पैसिओली के सूमा^२ नामक ग्रन्थ में इसका उल्लेख मिलता है। पैसिओली का कहना है कि यह विधि “अन्य विधियों की अपेक्षा अधिक कौतुक एवं चातुर्य से पूर्ण है।” गणेश ने भी लिखा है कि “यह (विधि) अत्यन्त कौतुकपूर्ण है और मन्दबुद्धि विद्यार्थी परम्परागत मौखिक शिक्षा के बिना इसे सीख नहीं सकता।”

स्थान-खण्ड गुणन

इस विधि में गुण्य अथवा गुणक के स्थान अलग-अलग करके रखे जाते हैं। ६२८ ६० के बाद के सभी ग्रन्थों में यह विधि मिलती है। भास्कर द्वितीय ने इस विधि^३ का निम्न विवरण दिया है “पृथक् पृथक् स्थानों से गुणा करके सब को एक साथ जोड़ना चाहिए।”

१३५ को १२ से गुणा करने का उदाहरण लेकर भास्कर द्वितीय ने इस विधि को निम्न प्रकार से समझाया है

“गुणक के स्थानों से, अर्थात् १ और २ से, गुण्य को अलग-अलग गुणा करने पर तथा प्राप्त गुणनफलों को स्थान के क्रम में जोड़ने पर १६२० गुणनफल मिलता है।”

इस विधि के अनुसार गुणा करने में अकस्थापन में कई क्रमों का उपयोग किया गया है। उनमें से कुछ निम्नलिखित हैं

$$\begin{array}{r}
 (१)^४ \qquad \qquad \qquad १३५ \\
 \qquad \qquad \qquad १२ \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad १२ \\
 \qquad \qquad \qquad ३६ \\
 \qquad \qquad \qquad ६० \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad १६२०
 \end{array}$$

^१ लीलावती, (१, ४-६) पर गणेश की टीका देखिए।

^२ स्मिथ (पूर्वोक्त ग्रंथ भाग २, पृ० ११२) ने इस ग्रन्थ को उद्धृत किया है।

^३ लीलावती, पृ० ३।

^४ टेलर द्वारा प्रयोग की हुई हस्तलिपि। टेलर की लीलावती, पृ० ८-९, देखिए।

(२)^१

$$\begin{array}{r}
 १२ \ १२ \ १२ \\
 १ \ ३ \ ५ \\
 \hline
 १२६० \\
 ३६ \\
 \hline
 १६२०
 \end{array}$$

(३)^२

$$\begin{array}{r}
 १३५ \ १३५ \\
 १ \ २ \\
 \hline
 २७० \\
 १३५ \\
 \hline
 १६२०
 \end{array}$$

गोमूत्रिका^३ विधि

इस विधि का वर्णन ब्रह्मगुप्त के ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त में मिलता है। विगेषताओं में यह स्थान-खण्ड गुणन के सदृश ही है। इसका एक उदाहरण ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त पर पृथूदक स्वामी कृत टीका में मिलता है, जो इस प्रकार है

उदाहरण। १२२३ को २३५ में गुणा करना।

इन संख्याओं को पहले निम्न प्रकार से लिखते हैं—

$$\begin{array}{r}
 २ \qquad १ \ २ \ २ \ ३ \\
 ३ \qquad १ \ २ \ ० \ ३ \\
 ५ \qquad १ \ २ \ २ \ ३
 \end{array}$$

उसके बाद २, ३ और ५ से सामनेवाले अंको को गुणा करते हैं और प्राप्त गुणनफलों को आधुनिक रीति से जोड़ लेते हैं,

$$\begin{array}{r}
 २ \ ४ \ ४ \ ६ \\
 ३ \ ६ \ ६ \ ९ \\
 ५ \ १ \ १ \ ५ \\
 \hline
 २ \ ८ \ ७ \ ४ \ ० \ ५
 \end{array}$$

प्राप्त योग, अर्थात् २८७४०५, ही इष्ट गुणनफल है।

^१ इस प्रकार की गणना एशियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल, कलकत्ता, की लाइब्रेरी में संगृहीत गगाधर की लीलावती-टीका में मिलती है।

^२ इस प्रकार की गणना भी गगाधर की लीलावती-टीका में उपलब्ध है।

^३ गोमूत्रिका शब्द का अर्थ है “गाय के मूत्र करने की भाँति” अर्थात् “टेढ़ी-मेढ़ी”। कोलब्रुक का पाठ ‘गोसूत्रिका’ अशुद्ध है। पंडित लोग आज तक ज्योतिष सबन्धी संख्याओं के गुणन करने की विधि को गोमूत्रिका कहते हैं।

स्थान-खंड और गोमूत्रिका विधियाँ गुणन की आधुनिक विधि से बहुत अधिक मिलती-जुलती हैं। स्थान-खंड का प्रयोग कागज पर गणना करने में होता था।

रूप-खंड गुणन

यह विधि ६२८ ई० के बाद के सब ग्रंथों में मिलती है। इस विधि के दो भेद हैं

(१) गुणक के दो या अधिक ऐसे भाग करते हैं जिनका जोड़ गुणक के तुल्य होता है। इसके अनन्तर गुण्य को उन भागों से अलग-अलग गुणा करके उन गुणनफलों को जोड़ लेते हैं।

(२) गुणक को दो या दो से अधिक गुणनखंडों में विभक्त करते हैं। उसके बाद गुण्य को एक-एक करके उन गुणनखंडों से गुणा करते हैं। अन्तिम गुणनफल इष्ट गुणनफल होता है।

ये प्रकार अरबों और इटैलियनों के ग्रंथों में मिलते हैं। इन लोगों ने इन्हें हिन्दुओं में सीखा था। इटैलियन लोग इन प्रकारों को क्रमानुसार “स्कैपेजो” और “रेपीगो” कहते हैं।

बीजीय विधि

इस विधि का नाम इष्ट-गुणन है। ब्रह्मगुप्त ने इस विधि का जो विवरण दिया है उसका उल्लेख किया जा चुका है। भास्कर द्वितीय का विवरण निम्न-लिखित है

“गुणक में इष्ट संख्या को घटाकर अथवा जोड़कर, शेष अथवा योगफल को (गुण्य में) गुणा करो, और इष्ट संख्या तथा गुण्य के गुणनफल को (क्रम में) उसमें जोड़ अथवा घटा दो।”

यह विधि दो प्रकार की है पहला प्रकार वह है जिसमें गुणक में इष्ट संख्या जोड़ी जाती है, दूसरा वह जिसमें गुणक में इष्ट संख्या घटाई जाती है। इष्ट संख्या इस प्रकार ली जाती है कि प्राप्त होनेवाली संख्या में गुण्य को गुणा करने में सरलता हो। दोनों प्रकारों की गुणन-विधियों का स्पष्टीकरण नीचे के उदाहरणों द्वारा किया गया है

$$\begin{aligned}
 (१) \quad १३५ \times १२ &= १३५ \times (१२ + ८) - १३५ \times ८ \\
 &= २७०० - १०८० \\
 &= १६२०
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (२) \quad १३५ \times १२ &= १३५ \times (१२ - २) + १३५ \times २ \\
 &= १३५० + २७० \\
 &= १६२०
 \end{aligned}$$

इस विधि का प्रयोग अरबों^१ और यूरोपवासियों^२ में मिलता है, जिसका कारण स्पष्टतः भारतीय प्रभाव था।

५. भाग

परिभाषा

प्रतीत होता है कि भाग को गुणन की उलटी क्रिया मानने थे। इस परिकर्म के हिन्दू नाम भागहार, भाजन, हरण, छेदन, इत्यादि हैं। इन सब शब्दों का शाब्दिक अर्थ, 'टुकड़े करना' अर्थात् 'भाग करना है', केवल हरण शब्द का अर्थ 'ले लेना' है। इस शब्द से प्रदर्शित होता है कि भाग का घटाने में सम्बन्ध है। जिस संख्या का भाग किया जाता है उसे भाज्य, हार्य, इत्यादि कहते हैं। जिससे भाग किया जाता है उसे भाजक, भागहार या केवल हर कहते हैं, और भाग करने से जो संख्या प्राप्त होती है उसे लव्य या लब्ध कहते हैं।

करण

१५वीं और १६ वीं शताब्दी तक यूरोप के विद्वान भाग के परिकर्म को कठिन और जटिल समझते रहे हैं,^३ परन्तु भारतवर्ष में भाग करने की अत्यन्त सतोपजनक विधि बहुत पहले से ही ज्ञात होने के कारण वह कठिन नहीं माना जाता था। वस्तुतः किसी भी हिन्दू गणितज्ञ ने इस परिकर्म को विशेष महत्त्व नहीं दिया है।

^१ उदाहरणतः, वेहाउद्दीन (ल० १६०० ई०)। देखिए जी० इनेस्त्राम, विभिन्न-योग्यता मॅथेमेटिका, ७(३), पृ० ६५।

^२ उदाहरणतः, विडमैन (१४८६ ई०), रीज (१५२२ ई०), इत्यादि। देखिए स्मिथ, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० १२०।

^३ स्मिथ, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० १३२।

आर्यभट प्रथम ने तो अपने ग्रंथ में भाग करने की विधि का उल्लेख भी नहीं किया है। परन्तु चूँकि उसने वर्णमूल और घनमूल निकालने की आधुनिक विधियों का, जो भाग करने की विधि पर ही निर्भर है,^१ वर्णन किया है, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि भाग करने की विधि उस समय सर्वविदित थी और अत्यन्त साधारण होने के कारण ही आर्यभट ने अपनी आर्यभटीय में उसका वर्णन नहीं किया है। ब्रह्मगुप्त, श्रीपति, इत्यादि बहुत से परवर्ती लेखकों ने भी आर्यभट का ही अनुकरण करके अपने ग्रंथों में भाग की विधि का वर्णन नहीं किया है।

भाग की आधुनिक विधि के प्रचार में आने के पूर्व, भाग करने में कदाचित् सदृशापवर्तन^२ की विधि का प्रयोग किया जाता रहा हो, क्योंकि सदृशापवर्तन की विधि के उल्लेख आदिम जैन-ग्रंथों में मिलते हैं।^३ इस विधि का उल्लेख आधुनिक विधि के ज्ञाता महावीर ने भी किया है, संभवतः इसलिए कि कुछ अवस्थाओं में यह विधि अधिक उपयुक्त थी।

“भाज्य को और उसके नीचे भाजक को रखने के अनन्तर सदृशापवर्तन की विधि के अनुसार भाग देकर लब्धि वताना चाहिए।”^४

बाली हस्तलिपि में अनेक स्थानों पर भाग के परिकर्म का नाम मिलता है परन्तु भाग की आधुनिक विधि का वर्णन नहीं है। हो सकता है कि यह अभाव उस प्रति के खटित होने के कारण है, यद्यपि यह भी संभव है कि उस समय (३०० ई०) भाग की विधि ज्ञात न रही हो।

भाग की विधि

भाग की आधुनिक विधि का वर्णन सबसे पहले श्रीधर की त्रिशतिका में मिलता है जो इस प्रकार है :—

“भाज्य और भाजक को तुल्य राशि में अपवर्तन करने के अनन्तर, भाज्य को

^१ उसने परिभाषिक शब्द ‘लब्ध’ का भी उसी अर्थ में प्रयोग किया है।

^२ दो या दो से अधिक सख्याओं को उनके महत्तम समापवर्तक से भाग देने को सदृशापवर्तन कहते हैं।

^३ तत्प्रायश्चित्तम सूत्र, उमास्वाति (ल० १६० ई०) कृत भाष्य, एच० आर० शास्त्री द्वारा संपादित, बम्बई, १९२६, भाग २, अध्याय २, श्लोक ५२, पृ० २२५।

^४ गणित सार-संग्रह पृ० ११, यदि भाज्य भाजक से पूरा-पूरा विभक्त नहीं होगा, तो इस विधि से लब्धि नहीं प्राप्त होगी।

^५ त्रिशतिका, पृ० ४।

(एक-एक अक करके) क्रम से विलोम विधि के अनुमार भाग देना चाहिए।”
महावीर का वर्णन इस प्रकार है ^१

“सदृशापवर्तन विधि के अनुमार (भाज्य और भाजक का) अपवर्तन करने के बाद जो (भाज्य और भाजक) शेष बचे उनमें से भाज्य को नीचे लिख कर भाजक से प्रतिलोम विधि के अनुमार भाग देना चाहिए।”

आर्यभट्ट द्वितीय ने भाग की विधि का और भी अधिक विवरण दिया है •

“भाज्य के नीचे बायीं ओर भाजक को रखकर, भाज्य में से भाजक का जितने गुना घट सके घटाओ, इस प्रकार जितने गुना भाजक घट जाय, वह आशिक लब्धि हुई। इसके बाद भाजक को एक स्थान हटाकर रखो और उसमें शेष (भाज्य) को (पूर्ववत्) भाग दो। जब तक भाज्य भाजक में कम न हो जाय, ऐसा ही करते जाओ।”

निम्नलिखित उदाहरण में समझ में आ जायगा कि हिन्दू लोग पाटी पर किस प्रकार भाग करते थे।

उदाहरण। १६०० को १० में भाग करना।

भाज्य के नीचे भाजक को इस प्रकार रखते हैं।

१६२०

१२

भाग की क्रिया भाज्य के विलकुल बायीं ओर के अंको से, यहाँ पर १६ में, आरम्भ होती है। इस १६ को १२ में भाग देते हैं। लब्धि १ को अलग एक पक्ति में रखते हैं, और १६ को मिटाकर उसके स्थान में शेष ४ को रखते हैं। भाजक और लब्धि के गुणनफल को भाज्य में घटाने की क्रिया इस प्रकार करते हैं। $१ \times १ = १$, $१ - १ = ०$, इसलिए भाज्य के १ को मिटा देते हैं, इसके बाद $१ \times २ = २$, $६ - २ = ४$, अतएव भाज्य के ६ को मिटाकर उसके स्थान में ४ रखते हैं। इस प्रकार पाटी पर निम्न मस्याएँ होती हैं

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ११, रंगाचार्य का अनुवाद देखिए।

^२ महासिद्धान्त, पृ० १४४।

४२०

१२

१

लब्धि की पक्ति

भाजक को अब एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं

४२०

१२

१

लब्धि की पक्ति

अब ४२ को १२ से भाग देते हैं। लब्धि ३ को पक्ति में रखते हैं और ४२ को मिटाकर उसके स्थान में शेष ६ को रखते हैं। इस प्रकार पाटी पर निम्नलिखित सस्याएँ होती हैं

६०

१२

१३

लब्धि की पक्ति

भाजक को पुन एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं

६०

१२

१३

लब्धि की पक्ति

अब ६० को १२ से भाग देते हैं और प्राप्त लब्धि ५ को पक्ति में रखते हैं, शेष गून्य होने के कारण भाज्य ६० और भाजक १२ दोनों को मिटा देते हैं। इस प्रकार लब्धि की पक्ति में १३५ हो जाता है

१३५

लब्धि की पक्ति

यही इष्ट लब्धि है।

उपर्युक्त विधि में यदि भाज्य के अंक मिटाये न जायें और क्रमानुसार प्राप्त होने वाले अंक एक के नीचे एक करके रखे जायें तो वह भाग करने की आधुनिक विधि का स्वरूप ग्रहण कर लेगी।

उपर्युक्त विधि का आदिष्कार सम्भवत चौथी शताब्दी में (अथवा और पहले) भारतवर्ष में हुआ था। भारतवर्ष से यह अरबों को प्राप्त हुई और नवी शताब्दी के बाद के अरबी ग्रंथों में इसका वर्णन मिलता है।^१ अरब से यह विधि यूरोप को

^१लब्धि की पक्ति प्रायः भाज्य के ऊपर लिखी जाती थी।

^२अल-ख्वारिज्मी (ल० ८२५ ई०), अल-नसवी (ल० १०२५ ई०), देखिए स्मिथ, पूर्वोक्त ग्रंथ पृ० १३८-१३९।

पहुँची, यहाँ पर यह गैली (गैलिया या वटैलो) विधि के नाम से विख्यात हुई।^१ गैली विधि कागज पर की जाती थी, अतएव अको को मिटान के स्थान में उन्हें काट देते थे। १५वीं शताब्दी से लेकर १८वीं शताब्दी तक यह विधि यूरोप में अत्यधिक प्रचलित थी।^२ उपर्युक्त उदाहरण गैली विधि के अनुसार निम्न प्रकार से किया जायगा।

१	४ ४४२० ४४२ १	१
२	४ ४६ ४४२० ४४४२ ४१	१३
३	४४ ४६ ४४४० ४४४४ ४	१३५

(१), (२) और (३) में अको को एक के बाद एक करके काटने की क्रिया की हिन्दू विधि की अको को मिटाने की क्रिया के साथ तुलना करने पर स्पष्ट हो जाता है कि गैली विधि वस्तुतः वही है जो हिन्दू विधि। हिन्दू विधि के अनुसार अको को मिटाने की अपेक्षा अको को काटना अधिक कष्टदायक प्रतीत होता है।

ज्यो-ज्यो लव्वि के अंक निकलते जाते थे, त्यो त्यो भाजक को एक स्थान दाहिनी ओर हटाने की हिन्दू विधि, यद्यपि अनिवार्य नहीं थी, अरबों द्वारा ग्रहण की गयी और वह अल-ख्वारिज्मी (८२५ ई०), अल-नसवी (ल० १०२५ ई०) जैसे प्रख्यात लेखकों के ग्रंथों में मिलती है। मध्यकालीन लेटिन लेखकों ने इस लक्षण-विशेष को ऐनटीरियोरेशियो नाम प्रदान किया है।

^१ इसे 'स्क्रेच विधि' भी कहते थे।

^२ विस्तृत विवरण के लिए, देखिए स्मिथ, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० १३६-१३६।

८ वर्ग

परिभाषा

वर्ग शब्द का शान्दिक अर्थ है 'पक्ति' अथवा 'समुदाय'। परन्तु गणित में इसका अर्थ 'वर्गघात' तथा 'वर्गक्षेत्र' अथवा उमका क्षेत्रफल होता है। इस प्रकार आर्यभट्ट प्रथम लिखते हैं

“समचतुरस्र^१ (अर्थात् वर्गकार क्षेत्र) और उसका क्षेत्रफल वर्ग कहलाता, है। दो समान मख्याओ का गुणन भी वर्ग है।”^२

वर्ग शब्द का प्रयोग इस अर्थ में क्यों किया गया इस बात की ओर ध्यान देने स्पष्ट मकेत किया है। उनका कथन है कि “इस शब्द के उद्गम की खोज स्पष्टतः उम वर्ग के चित्रात्मक प्रदर्शन में करना चाहिए जिसमें उतने वर्ग बने हों जितनी उमकी एक भुजा में इकाइयाँ हों। इस प्रकार वह वर्ग जिसकी एक भुजा ५ पद की है, ५ ऐसे (आयत) कोण्डों में विभक्त किया जा सकता है जिनमें से प्रत्येक में १ पद भुजावाले ५ छोटे-छोटे वर्ग होंगे।”^३ वर्ग शब्द की उत्पत्ति के इस स्पष्टीकरण को शल्व ग्रन्थों के कुछ अवतरणों में समर्थन मिलता है।^४

वर्ग के अर्थ में कृति शब्द का भी प्रयोग किया गया है। कृति का अर्थ है 'करना' 'बनाना', अथवा 'कर्म'। यह शब्द 'कार्य-विशेष' सम्भवन 'चित्रीय प्रदर्शन' का भाव वहन करता है।

वर्ग और कृति दोनों ही शब्द गणित के ग्रन्थों में मिलते हैं, परन्तु वर्ग शब्द की प्रचुरता है। परवर्ती लेखकों ने, इन शब्दों की परिभाषा करते समय, इसके अर्थ को सीमित कर दिया है। उदाहरणतः श्रीधर का कथन है

“दो समान मख्याओ का गुणनफल वर्ग है।”

^१ टीकाकार परमेश्वर का कथन है “चार भुजाओ वाला वह क्षेत्र जिसकी भुजाएँ बराबर हों तथा जिसके दोनों कर्ण भी बराबर हों समचतुरस्र कहलाता है।”

^२ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लो० ३।

^३ श्रीधर, शल्व सूत्रज पृ० ४८।

^४ आपस्तम्ब शल्व, ३ ७, वात्स्यायन शल्व ३ ६, देखिए बी० दत्त, अमेरिकन मैथेमेटिकलसमयली, जिल्द ३३, १९३१, पृ० ३७५।

^५ त्रिगतिवा पृ० ५।

पूयूदक स्वामी^१, महावीर^२, एवं अन्य लेखको ने भी वर्ग की ऐसी ही परिभाषाएँ की हैं।

करण

वर्ग का परिकर्ष के रूप में मिलना हिन्दू-गणित की एक विशेषता है। तथापि वर्गीकरण की विधि साधारण गुणन की विधि की अपेक्षा सरल नहीं है। हिन्दू लेखको ने इस परिकर्म को संभवतः इसलिए महत्त्व दिया कि वर्गमूल की विधि वर्ग की विधि की ठीक उलटी थी। यद्यपि वर्गीकरण की विधि पहले पहल ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त में मिलती है, तो भी हममें सदेह नहीं कि यह विधि आर्यभट्ट प्रथम को ज्ञात थी क्योंकि उन्होंने वर्गमूल की विधि का वर्णन किया है।

ब्रह्मगुप्त ने इस विधि^३ का वर्णन अत्यन्त संक्षेप में किया है

“ऊन^४ स्थानवाले अक के दूने को अगले स्थानवाले अको में गुणा करने पर जो आवे उसे ऊन स्थानवाले अक के वर्ग के साथ (यथास्थान बार बार) जोड़ने से वर्ग प्राप्त होता है।”

श्रीधर का वर्णन अधिक स्पष्ट है^५

“अन्तिम अक का वर्ग करके, अन्तिम अक के दूने को शेष अको में गुणा करो। उन शेष अको को एक स्थान दाहिनी ओर हटाओ और पुनः वही क्रिया करो। वर्ग निकालने के लिए इसी प्रकार शेष को एक-एक स्थान हटा-हटा कर उपर्युक्त क्रिया करनी चाहिए।”

^१देखिए कोलब्रुक, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० २७९।

^२गणित-सारसंग्रह, पृ० १२।

^३इस विधि की चर्चा गणिताध्याय में नहीं की गयी है, परन्तु परिशिष्ट के रूप में इसका वर्णन किया गया है (देखिए ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० २१२)। कदाचित् इस विधि की ओर ब्रह्मगुप्त का ध्यान बाद में गया हो।

^४कोलब्रुक ने ‘राशेरूनम्’ का अनुवाद “कम भाग (दि लेस पोर्शन)” किया है, जो अशुद्ध है। उनका कथन है कि “पाठ अस्पष्ट है” (पृ० ३२२, फुटनोट ६), क्योंकि उनके अनुवाद के अनुसार उक्त नियम का कोई अर्थ नहीं लगता। वस्तुतः राशेरूनम् को “ऊनतम स्थान वाला अक” से अनुवाद करना चाहिए। उक्त विवेचन से द्विवेदी सहमत है (पृ० २१२)। यहाँ पर बतलायी गयी विधि ‘वर्ग निकालने की अनुलोम विधि’ है।

^५त्रिशतिका, पृ० ५। के और रामानुजाचार्य का अनुवाद अशुद्ध है।

महावीर^१ ने इस विधि का अधिक विवरण दिया है

“अन्तिम स्थानवाले अंक का वर्ग करके, अन्तिम स्थानवाले अंक को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाकर उसके दूने को शेष अंकों से गुणा करो। इसके बाद शेष अंक को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाकर वही क्रिया बार-बार करो। इस प्रकार (इष्ट मस्या का) वर्ग प्राप्त होगा।”

भास्कर द्वितीय^२ ने इस प्रकार लिखा है

“अन्तिम स्थानवाले अंक के वर्ग को अपने स्थान के ऊपर लिखो, अन्य अंकों को अन्तिम स्थानवाले अंक के दूने से गुणा करो, और प्राप्त गुणनफलों को क्रमशः अपने-अपने स्थानों के ऊपर लिखो। अब अन्तिम अंक को मिटा दो और शेष अंक को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाकर रखो और पुनः वही क्रिया करो।”

भास्कर ने लिखा है कि उपर्युक्त क्रिया इकाई से भी आरम्भ की जा सकती है।^३

श्रीधर, महावीर, और भास्कर द्वितीय इत्यादि के अनुसार अन्तिम स्थान से आरम्भ करके उक्त क्रिया को पाटी पर करने की निम्नलिखित विधि है -

उदाहरण। १०५ का वर्ग निकालना।

पहले मस्या को लिखते हैं

१२५

अन्तिम अंक १ है। इसके वर्ग को अन्तिम स्थान के ऊपर लिखते हैं

१

१२५

इसके बाद अन्तिम अंक का दूना $१ \times २ = २$, इसे शेष अंकों के नीचे (अनुलोम विधि में २ के नीचे और विलोम विधि में ५ के नीचे) लिखते हैं, और अन्तिम अब १ को मिटा देते हैं। इस प्रकार पाटी पर निम्न मस्याएँ होती हैं

१

२५

२

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० १३।

लीलावती, पृ० ४।

^२ लीलावती, पृ० ५।

नीचे के अंक २ से शेष अंको को गुणा करके गुणनफलों को अपने-अपने स्थान के ऊपर लिखते हैं।

१५०

२५

इसके बाद शेष अंको को एक स्थान दाहिनी ओर हटाते हैं।

१५०

२५

इसके बाद उपर्युक्त विधि की पुनरावृत्ति करते हैं। पहले अन्तिम अंक २ के वर्ग को उस स्थान के ऊपर लिखते हैं

१५४

१२५

इसके बाद अन्तिम अंक के दूने में (अर्थात् $२ \times २ = ४$) को शेष अंक के नीचे रखकर, २ को मिटा देते हैं।

१५४

५

४

गुणा करने पर, $४ \times ५ = २०$, और गुणनफल को सगन अंक ५ के ऊपर रखने पर (अर्थात् ० को ५ के ऊपर रखने पर और २ को बायी ओर के ४ में जोड़ने पर), पाटी पर निम्नलिखित सख्याएँ होती हैं

१५६०

५

५ को पुनः एक स्थान दाहिनी ओर हटा कर रखते हैं।

१५६०

५

५ का वर्ग करने पर २५ मिलता है। इसे ५ के ऊपर रखते हैं (अर्थात् ५ को ५ के ऊपर और २ को उसके बायी ओर रखते हैं)।

१५६२५

५

क्रिया की समाप्ति हो जाने के कारण नीचे के ५ को मिटा देते हैं। इस प्रकार पाटी पर निम्न सख्या होती है

१५६०५

यही १२५ का वर्ग है।

ब्रह्मगुप्त और भास्कर द्वितीय के अनुसार यह क्रिया आदिस्थान (अर्थात् इकाई) से भी आरम्भ की जा सकती है। ब्रह्मगुप्त ने निम्नलिखित विधि की ओर मकेत किया है

उदाहरण। १२५ का वर्ग करना।

पहले सख्या लिखी जाती है

१ २ ५

आदिस्थान के अंक के वर्ग (अर्थात् $५^२ = २५$) को आदि स्थान के ऊपर लिखते हैं

२ ५
१ २ ५

इसके बाद $२ \times ५ = १०$ को अन्य अंको के नीचे रखते हैं, और ५ को मिटा देते हैं

२ ५
१ २
१ ०

१० में शेष अंको, अर्थात् १२, को गुणा कर गुणनफल को उन अंको के ऊपर लिखते हैं

१ २ २ ५
१ २
१ ०

इसके बाद १२ को एक स्थान बायी ओर हटाकर, १० को मिटा देते हैं

१ २ २ ५
१ २

इसके बाद उसी क्रिया की पुनरावृत्ति करते हैं। अर्थात् पहले २ के वर्ग ४ को उसके ऊपरवाले अंक में जोड़ते हैं, और $२ \times २ = ४$ को १ के नीचे लिखते हैं तथा २ को मिटा देते हैं

१ ६ २ ५
१
४

शेष अंक १ को ४ से गुणा कर गुणनफल ४ को १ के ऊपरवाले अंक में जोड़ देते हैं और ४ को मिटा देते हैं

५ ६ २ ५

१

शेष अक १ को पुन एक स्थान बायी ओर हटाते हैं

५ ६ २ ५

१

इसके बाद पूर्व क्रिया की पुनरावृत्ति करते हैं। अर्थात् १ के वर्ग को उसके ऊपर लिखते हैं, और अक न होने से क्रिया समाप्त हो जाती है। पाटी पर निम्न-संख्या बचती है

१ ५ ६ २ ५

जो इष्ट वर्ग है।

वर्ग करने की गौण विधियाँ

सभी हिन्दू गणितज्ञों ने

$$(१) \quad n^2 = (n-k)(n+k) + k^2$$

की चर्चा की है और बतलाया है कि कभी-कभी इसकी म्हायता से वर्ग निकालने में सुविधा होती है।

उदाहरणतः,

$$\begin{aligned} १५^2 &= १० \times २० + २५ \\ &= २२५ \end{aligned}$$

ब्रह्मगुप्त का कथन है

“दी हुई संख्या में कोई कल्पित संख्या जोड़ दो, पुन दी हुई संख्या में कल्पित संख्या घटा दो, दोनों को गुणा करो, और गुणनफल में कल्पित संख्या का वर्ग जोड़ दो। इस प्रकार दी हुई संख्या का वर्ग प्राप्त होता है।”^१

श्रीधर ने इस प्रकार लिखा है

“जिस संख्या का वर्ग निकालना हो उसमें एक बार कोई कल्पित संख्या जोड़ दो और एक बार वही संख्या घटा दो। जो संख्याएँ इस प्रकार प्राप्त हो उनके गुणनफल में कल्पित संख्या का वर्ग जोड़ दो। इस प्रकार जो संख्या प्राप्त होगी वही वर्ग है।”^२

^१ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, अध्याय १२, श्लोक ६३ (उत्तरार्ध)।

^२ त्रिशतिका, पृ० ५।

महावीर, भास्कर द्वितीय, नारायण, तथा अन्य लेखको ने भी उपर्युक्त सर्व-समिका दी है।

सूत्र

$$(२) \quad (क+ख)^२ = क^२+ख^२+२ क ख$$

अथवा इसके व्यापक स्वरूप

$(क+ख+ग+...)^२ = क^२+ख^२+ग^२+...+२ क ख+२ ख ग+...$
 को चर्चा वर्ग निकालने के प्रकारान्तर के रूप में की गयी है। उदाहरणतः, महावीर^१ का कथन है

“दो या दो से अधिक स्थान^२ वाली सख्याओं का वर्ग निकालने के लिए (भिन्न-भिन्न स्थानों में स्थित) सब (अंकों) का (अलग-अलग) वर्ग करो, फिर उन अंकों को एक दूसरे में गुणा कर के प्रत्येक को दूना करो, और सबको (जोड़ कर) एक में मिला दो, इस प्रकार से प्राप्त सख्या ही इष्ट वर्ग है।”

भास्कर द्वितीय^३ लिखते हैं

“दोनों (स्थान) खंडों के गुणनफल का दूना करो और उसमें दोनों खंडों के वर्गों के योग को जोड़ दो, इस प्रकार से भी वर्ग की प्राप्ति होगी।”

श्रीधर और महावीर ने निम्नलिखित सूत्र की चर्चा की है

$$(३) \quad न^२ = १+३+५+... \quad \text{न पदों तक।}$$

श्रीधर^४ लिखते हैं

“१ आदि और २ चय वाली श्रेणी का योग भी वर्ग के तुल्य होता है।”
 महावीर का कथन अधिक स्पष्ट है

“१ आदि और २ चय वाली श्रेणी के इष्ट सख्या तुल्य पदों का योग (इष्ट सख्या के) वर्ग के तुल्य होता है।”^५

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० १३।

^२ स्थान शब्द से इकाई, दहाई, इत्यादि अंक-स्थानों से तात्पर्य है।

^३ लीलावती, पृ० ४।

^४ त्रिशतिका, पृ० ५।

^५ गणित-सार-संग्रह, पृ० १२।

नारायण^१ ने भी उपर्युक्त श्रेढी का उल्लेख किया है। उन्होंने न सख्या का वर्ग ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र^२ भी दिया है

$$n^2 = (क + ख)^2 = (क - ख)^2 + ४ क ख, \text{ जहाँ पर } क + ख = n।$$

ध्यान देने योग्य है कि वर्ग करने की उपर्युक्त विधियाँ केवल पूर्णांकों के लिए हैं। भिन्नो का वर्ग करने की विधियाँ भिन्नो के प्रकरण में बतायी जायेंगी।

७ घन

परिभाषा

घन शब्द गणित के सब ग्रन्थों में मिलता है। इसका प्रयोग ज्यामितीय और गणितीय दोनों अर्थों में, अर्थात् ठोस घन तथा तीन समान सख्याओं के गुणनफल को सूचित करने में, किया गया है। आर्यभट्ट प्रथम लिखते हैं

“तीन समान सख्याओं का गुणनफल तथा बारह बराबर कोणों (और भुजाओं) वाला ठोस भी घन है।”^३

श्रीधर^४, महावीर^५, और भास्कर द्वितीय^६, प्रत्येक का कथन है कि
‘तीन समान सख्याओं का गुणनफल घन है।’

घन के अर्थ में बृन्द शब्द का भी प्रयोग मिलता है परन्तु बहुत कम।

करण

दशमलव स्थान-मान सिद्धान्त के अनुसार लिखी हुई सख्याओं का घन निकालने की विधि का प्रयोग भारतवर्ष में पाँचवी शताब्दी के पहले में हुआ है। यह विधि आर्यभट्ट प्रथम को ज्ञात थी, परन्तु उन्होंने इसे उतना महत्त्व नहीं दिया जितना घनमूल निकालने की प्रतिलोम विधि को, जिसका उन्होंने वर्णन किया है।

ब्रह्मगुप्त ने घन निकालने की विधि का निम्नलिखित शब्दों में वर्णन किया है

^१ गणित कौमुदी, अध्याय १, श्लोक १७-१८।

^२ उनका कथन है: “दो सख्याओं के अन्तर के वर्ग को उन सख्याओं के गुणनफल के चौगुने में जोड़ दो, (तो उन दो सख्याओं के योग का वर्ग प्राप्त होगा)।”

^३ आर्यभटीय, गणित-पाद, श्लोक ३।

^४ त्रिशक्तिः, पृ० ६।

^५ गणित-सार-संग्रह, पृ० १४।

^६ लीलावती, पृ० ५।

“अन्त्य (अर्थात् अन्तिम स्थानवाले अक) का घन लिखो।^१ (उसके एक स्थान आगे अर्थात् दाहिनी ओर) अन्त्य के वर्ग को उत्तर (अर्थात् उपान्तिम अक) के तिगुने में गुणा करके जो आवे वह लिखो, (उसके एक स्थान आगे) उत्तर के वर्ग को अन्त्य के तिगुने में गुणा करके जो आवे वह लिखो, और (उसके एक स्थान आगे) उत्तर का घन लिखो। इस प्रकार (अन्त्य और उत्तर दो अको से बनी हुई मर्या का) घन प्राप्त होता है।”

श्रीधर का वर्णन निम्न प्रकार है ^२

“अन्त्य (अर्थात् अन्तिम अक) का घन लिखो, एक स्थान आगे, अन्त्य के वर्ग को त्रिगुणित आद्य^३ (अर्थात् उपान्तिम अक) से गुणा करके जो आवे वह लिखो, (इसके एक स्थान आगे) आद्य के वर्ग को अन्त्य से और तीन से गुणा करके जो आवे वह लिखो, और (इसके एक स्थान आगे) आद्य का घन भी लिखो। इस प्रकार में प्राप्त होने वाली मर्या (अन्त्य और आद्य दो अको से बनी हुई मर्या का) घन है।”

महावीर का कथन है ^४

“अन्त्य का घन लिखो, फिर एक स्थान हट कर, अन्त्य के वर्ग को ३ से और शेष (अर्थात् उपान्तिम अक) से गुणा करके जो आवे उसे लिखो, उसके

^१ टीकाकार पृथूदकस्वामी के अनुसार ‘अन्त्य’ का अर्थ ‘बायीं ओर का अन्तिम अक’ है। इस प्रकार ‘उत्तर’ का अर्थ ‘अन्त्य’ के दाहिनी ओरवाला अक है। जिस मर्या का घन करना होता है उसको टुकड़ों में विभक्त कर लेते हैं और बतलायी हुई विधि के अनुसार एक-एक करके उनका घन निकालते हैं। (आगे का उदाहरण देखिए)। यदि ‘अन्त्य’ का अर्थ ‘दाहिनी ओरवाला अन्तिम अक’ लिया जाय, तो भी कोई अन्तर न पड़ेगा। परन्तु उस अवस्था में ‘उत्तर’ का अर्थ ‘अन्त्य’ अक के बायीं ओरवाला अक लेना पड़ेगा।

^२ त्रिशतिका, पृ० ६।

^३ इस स्थान पर श्रीधर ने इसके लिए ‘पूर्व’ शब्द का भी प्रयोग किया है। जिसे ब्रह्मगुप्त ने ‘उत्तर’ कहा है, वही श्रीधर का ‘आद्य’ अथवा ‘पूर्व’ है।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० १५, श्लोक ४७। यह बात ध्यान देने योग्य है कि इस नियम में ‘शेष के घन को जोड़ने’ की बात नहीं कही गयी है। परन्तु इसके पहलेवाले श्लोक में इस क्रिया का विधान कर दिया गया है, अतएव इसे भी करना चाहिए।

फिर एक स्थान हटा कर शेष के वर्ग को त्रिगुणित अन्त्य से गुणा करके जो आवे उसे लिखो, यही (घन करने की) विधि है।”

भास्कर द्वितीय का वर्णन अधिक स्पष्ट है,^१

“अन्त्य का घन लिखो, फिर अन्त्य के वर्ग को त्रिगुणित आदि में गुणा करके लिखो, फिर आदि के वर्ग को त्रिगुणित अन्त्य में गुणा करके लिखो, और फिर आदि के घन को लिखो। इसको क्रम से एक-एक स्थान हटा कर लिखो और जोड़ लो। इस प्रकार (अन्त्य और आदि दो अंकों में बनी मस्या का) घन प्राप्त होगा। अब (अन्त्य और आदि सङ्ग) खड्युगो (में बनी हुई सख्या) को अन्त्य मान लो, और उपर्युक्त विधि का बार-बार (तब तक) प्रयोग करो (जब तक एक भी अंक शेष न बचे)। इस प्रकार इष्ट मस्या के घन की सिद्धि होगी। यह विधि आदि (अर्थात् इकाई) के अंक से भी आरम्भ की जा सकती है।”

उपर्युक्त विधि निम्नलिखित उदाहरण की सहायता में समझ में आ जायगी।
उदाहरण। १२३४ का घन निकालना।

इस सख्या में चार स्थान हैं। अंतिम स्थान में १ है और उपान्तिम स्थान में २ है। अतएव अन्त्य = १ और आदि = २। इन आदि और अन्त्य से घन की प्रक्रिया निम्नलिखित प्रकार से की जायगी।

$$(१) \text{ अन्त्य का घन } (१)^3 = १$$

$$(२) \text{ अन्त्य के वर्ग } (१)^2$$

और त्रिगुणित आदि (३ × २) का

$$\text{गुणनफल } (३ \times १^2 \times २) = ६ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$(३) \text{ आदि के वर्ग } (२^2), \text{ और}$$

त्रिगुणित अन्त्य (३ × १) का

$$\text{गुणनफल } (३ \times १^2 \times २^2) = १२ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$(४) \text{ आदि का घन } (२^3) = ८ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$\text{इस प्रकार } १२^3 \text{ का मान } = \overline{१७२८}$$

^१ लीलावती, पृ० ५।

^२ मूल के ‘स्थानान्तरत्वेन’ शब्द का अनुवाद कोलब्रुक ने ‘स्थानों के अनुसार’ किया है। यह अनुवाद अशुद्ध है और उस शब्द के भाव को ठीक-ठीक व्यक्त नहीं करता।

इसके बाद हम आगे के अंक ३ को, अर्थात् सख्या १२३ को लेते हैं। इस सख्या में १२ को अन्त्य और ३ को आदि मानते हैं। घन की क्रिया यह है

$$(१) \text{ अन्त्य का घन } (१२)^3 = १७२८$$

$$(२) \text{ अन्त्य के वर्ग और}$$

त्रिगुणित आदि का

$$\text{गुणनफल}(३ \times १२^2 \times ३) = १२९६ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$(३) \text{ आदि के वर्ग और}$$

त्रिगुणित अन्त्य का

$$\text{गुणनफल}(३ \times १२ \times ३^2) = ३२४ \text{ (एक स्थान हटा कर रखने पर)}$$

$$(४) \text{ आदि का घन } (३^3) = २७ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$\text{इस प्रकार } १२३^3 \text{ का मान } = \underline{१८६०८६७}$$

इसके बाद शेष अंक ४ को भी ले लेते हैं। इस प्रकार सख्या १२३४ हो जाती है। इसमें १२३ को अन्त्य और ४ को आदि कल्पना करते हैं। घन की क्रिया यह है।

$$(१) \text{ अन्त्य का घन } (१२३)^3 = १८६०८६७$$

$$(२) \text{ अन्त्य के वर्ग और त्रिगुणित}$$

$$\text{आदि का गुणनफल}(३ \times १२३^2 \times ४) = १८१५४८ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$(३) \text{ आदि के वर्ग और त्रिगुणित अन्त्य}$$

$$\text{का गुणनफल } (३ \times १२३ \times ४^2) = ५९०४ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$(४) \text{ आदि का घन } (४^3) = ६४ \text{ (एक स्थान हटाकर रखने पर)}$$

$$\text{अतएव } १२३४^3 \text{ का मान } = \underline{१८७९०८०९०४}$$

अन्लोम विधि भी, जिसमें क्रिया का आरम्भ इकाई में होता है, इसी प्रकार की जाती है।

घन निकालने की गौण विधियाँ

स्पष्ट है कि सूत्र

$$(१) \quad (क + ख)^3 = क^3 + ३ क^2 ख + ३ क ख^2 + ख^3$$

तथा सगत सूत्र

$$(क + ख + ग +)^३ = क^३ + ३ क^२ (ख + ग +) + ३ क (ख + ग +)^२ + (ख + ग +)^३$$

घन ज्ञात करने की उपर्युक्त हिन्दू विधि में निहित है। महावीर के निम्नलिखित कथन से यह स्पष्ट हो जाता है,^१

“अन्त्य और अन्य^२ (अर्थात् उपान्त्य) स्थानोवाले अको के वर्गों को एक दूसरे में और पुन ३ में गुणा करो, इसके बाद उनके योग में अन्त्य और अन्य के घनों का जोड़ दो। ऐसा करने पर (अन्त्य और अन्य में बनी हुई मध्या का) घन प्राप्त होगा।”^३

श्रीपति^४ और भास्कर द्वितीय^५ तथा नारायण^६ ने उक्त सूत्र का कथन निम्न-लिखित रूप में किया है^७

$$(क + ख)^३ = क^३ + ३कख(क + ख) + ख^३।$$

“दी हुई सख्या के तिगुने को उम (सख्या) के दो (गुणन) खडो में गुणा करके, जो गुणनफल प्राप्त हो उसे उन दो खडो के घनों के योग में जोड़ देने पर भी (दी हुई सख्या का) घन प्राप्त होता है।”

महावीर ने सूत्र

$$(२) न^३ = न(न + क)(न - क) + क^३ (न - क) + क^३$$

का निम्नलिखित शब्दों में कथन किया है^८

“इष्टरहित राशि, इष्टसहित राशि, और (केवल) राशि, इन तीनों के

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० १५।

^२ ‘अन्य’ का शाब्दिक अर्थ ‘दूसरा’ होता है। परन्तु यहाँ पर ‘अन्य’ से तात्पर्य उस अंक से है जो अन्त्य (अंतिम अंक) के दाहिनी ओर लिखा हुआ है।

^३ अर्थात् (२३४)^३ की गणना इस प्रकार की गयी है

$$(२०० + ३० + ४)^३ = २००^३ + ३ \times २००^२ (३० + ४) + ३ \times २०० (३० + ४)^२ + (३० + ४)^३।$$

और उसी विधि का पुन प्रयोग करने पर (३० + ४)^३ का मान निकाला गया है।

^४ देखिए अगरेजी अनुवाद, पृ० १७, नोट।

^५ गणित तिलक, २७।

^६ लीलावती, पृ० ५।

^७ गणित-कौमुदी, अध्याय १, श्लोक २३।

^८ गणित सार-संग्रह पृ० १४।

गुणनफल में, उक्त तीन सख्याओं में सब से छोटी सख्या और इष्टवर्ग के गुणनफल को तथा इष्ट के घन को जोड़ देने पर (राशि अर्थात् दी हुई सख्या का) घन प्राप्त होता है।^१

श्रेढी-गणित के आधार पर बने हुए न^१ के व्यञ्जक श्रीधर, महावीर, श्रीपति और नारायण ने दिये हैं। सूत्र

$$(३) \quad n^3 = \sum_{r=1}^n \{ 3r(r-1) + 1 \}$$

को श्रीधर ने निम्नलिखित शब्दों में व्यक्त किया है^१

“(किसी दी हुई सख्या का) घन उस श्रेढी के योग के तुल्य होता है जिसके पद, ० आदि और १ चय वाली श्रेढी में अन्तिम पद को त्रिगुणित उपान्त्य पद में गुणा करके १ जोड़ देने में, बनते हैं।”

नारायण का कथन है^२

“एक आदि और एक चय (और इष्ट सख्या तुल्य पद) वाली श्रेढी में ‘अन्तिम पद को त्रिगुणित उपान्त्य पद में गुणा करके उसमें १ जोड़ देने से, जो श्रेढी बने उसका योग (इष्ट सख्या का) घन है।”

महावीर ने उपर्युक्त सूत्र को निम्न रूप में दिया है

$$n^3 = 3 \sum_{r=1}^n r(r-1) + n$$

वे कहते हैं^३

“एक आदि, एक चय और इष्ट सख्या तुल्य पदवाली श्रेढी में पूर्वपद को आगे के पद में गुणा करो। इस प्रकार गुणा करने में जो श्रेढी बने उसके योग को ३ में

^१ त्रिशतिका, पृ० ६। के और रामानुजाचार्य का अनुवाद (त्रिविध्ययोगेका मथ्येमेटिका जिल्द ३, १६१२-१३) अशुद्ध है। इन महानुभावों ने मूल का अर्थ समझने में अपनी असमर्थता प्रकट की है (देखिए पृ० २०६, टिप्पणी)। सुधाकर द्विवेदी (पृ० ६, टिप्पणी) ने भी इस नियम का अशुद्ध व्याख्या की है। ‘संके’, पाठ अशुद्ध है।

^२ गणितकौमुदी, अध्याय १, श्लोक २२।

^३ गणित-सार-मग्नह, अध्याय २, श्लोक ४५।

गुणा करके उसमें (एकादि चय वाली श्रेढी का) अन्तिम पद जोड़ दो। ऐसा करने से (इष्ट सख्या का) घन प्राप्त होता है।”

महावीर ने निम्नलिखित सूत्रों को

(४) $y^3 = y + 3y + 5y + \dots$ य पदों तक

(५) $y^3 = y^2 + (y-1) \{ 1 + 3 + \dots + (2y-1) \}$

निम्न शब्दों में व्यजित किया है^१

“इष्ट सख्या तुल्य आदि, द्विगुणित इष्ट सख्या तुल्य चय, और इष्ट सख्या तुल्य पदोंवाली श्रेढी का योग भी (इष्ट सख्या के घन के तुल्य है)।”

“१ आदि, २ चय और इष्ट सख्या तुल्य पदोंवाली श्रेढी के योग को एकोन इष्ट सख्या से गुणा करके इष्ट सख्या के वर्ग में जोड़ देने में भी (इष्ट सख्या का घन प्राप्त होता है)।”

८. वर्गमूल

परिभाषा

इस परिकर्म के लिए संस्कृत में दो शब्द हैं, मूल और पद। मूल शब्द का संस्कृत साहित्य में प्रचलित अर्थ पेड़ या पौधे की ‘जड़’ है, अथवा लक्षणा से किसी वस्तु का निम्नतम भाग। इसके अन्य अर्थ ‘आधार’, ‘नींव’, ‘कारण’ और ‘उद्गम’ इत्यादि हैं। पद शब्द का अर्थ है “पैर का नीचेवाला भाग” (लक्षणा में किसी वस्तु का निम्न भाग), “भाग”, “विभाग”, “चरणपाद”, “तरफ”, “स्थान”, “कारण”, “शतरज का वर्ग” इत्यादि। दोनों शब्दों में लगनेवाले अर्थ हैं “अधो-भाग”, “किसी वस्तु का निम्नतम भाग”, “कारण”, अथवा “उद्गम”। अतएव विलकुल स्पष्ट है कि वर्गमूल से हिन्दू लोगो का तात्पर्य ‘वर्ग का कारण या उद्गम’ अर्थात् “वर्ग की एक भुजा” से था। यह ब्रह्मगुप्त के निम्न कथन से अनुमोदित होता है।^२

“कृति का पद (अर्थात् वर्गमूल) वह है, जिसका वर्ग कृति है।”

वर्गमूल के अर्थ में प्रयुक्त उपर्युक्त शब्दों में से सबसे प्राचीन शब्द ‘मूल’ है।

^१ गणित-सार-संग्रह, अध्याय २, श्लोक ४४।

^२ ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त, अध्याय १८, श्लोक ३५।

यह शब्द अनुयोगद्वार-सूत्र (ल० १०० ई० पू०) तथा बाद के गणितीय ग्रंथों में मिलता है। पद शब्द बाद में, संभवतः ७वीं शताब्दी से, प्रयोग में आया। यह पहले-पहल ब्रह्मगुप्त के ग्रंथ में मिलता है।

मूल शब्द को अरबी ने ग्रहण किया और इसे 'जघ्र' (अर्थात् 'वर्ग का आधार') द्वारा अरबी में अनुवाद किया। लैटिन शब्द 'रैडिक्स' भी मूल शब्द का अनुवाद है।^१

शुल्ब ग्रंथों और प्राकृत साहित्य में वर्गमूल के अर्थ में 'करणी' शब्द का प्रयोग मिलता है। ज्यामिति में समकोण त्रिभुज के कर्ण को 'करणी' कहते हैं। बाद के काल में इस शब्द का प्रयोग उन अंकों के लिए किया गया जिनका पूरा-पूरा वर्ग नहीं होता था, किन्तु जो रेखा द्वारा व्यक्त किये जा सकते थे।

करण

वर्गमूल निकालने की विधि का वर्णन आर्यभटीय में अत्यन्त संक्षेप में निम्न प्रकार में किया गया है,

“(अन्तिम वर्गस्थान में से बड़ी से बड़ी जो वर्ग मर्या घट जाय उसे घटा दो। इसके बाद) सर्वदा वर्गमूल के दुगुने में अवर्गस्थान को भाग दो।^१ भाग करने में प्राप्त लब्धि के वर्ग को (आगे के) वर्गस्थान में से घटाओ। पृथक् पक्ति में रखी हुई मर्या वर्गमूल सूचित करती है।”^२

यह विधि निम्नलिखित उदाहरण में समझ में आ जायगी।

उदाहरण। ५४७५६ का वर्गमूल निकालना।

^१ विशेष विवरण के लिए देखिए, दत्त, अमेरिकन मैथेमेटिकल मथली, जिल्द ३४, पृ० ४२०-४२३, और जिल्द ३८, पृ० ३७१-३७६।

^२ भाग देने में लब्धि इतनी बड़ी लेना चाहिए कि उसका वर्ग अगले स्थान में से घटाया जा सके। भास्कर प्रथम, नीलकण्ठ, तथा अन्य टीकाकारों के अनुसार, मूल पाठ का यही भाव है।

^१ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लोक ४। रोडे (जर्नल एशियाटिक, १८८०, जिल्द २), के (जर्नल एशियाटिक सोसायटी वगाल, १९०७, जिल्द ३, और १९०८, जिल्द ४), सिंह (क्लेटिन कन्वन्ता मैथेमेटिकल सोसायटी, १९०७, जिल्द १८), बलार्क (आर्यभटीय) और अन्य लोगों द्वारा इस नियम का पहले अनुवाद किया जा चुका है। उनमें से के का अनुवाद नितान्त अशुद्ध है।

की विधि से) योजन प्राप्त करने में हमें वर्गमूल (की पक्ति) में क्रमशः ३, १, ६, २, २ और ७ अंक मिलते हैं, और नीचे (अन्तिम लब्धि के रूप में) ६३२४५४-मख्या मिलती है। इसको आधा करने पर तीन लाख सोलह हजार दो सौ मत्ताइम मिलता है। दी हुई मख्या (इसके वर्ग से) कुछ अधिक है, क्योंकि ४८४४७१ शेष बचता है ।”

“इसके अनन्तर ४ से गुणा करने पर ७५६०००००००००० की प्राप्ति होती है। इसका वर्गमूल पूर्णज्या का मान है। इसका वर्गमूल निकालने में क्रमशः २, ७, ४, ९, ५, और ४ अंक मिलेंगे। ।”

स्पष्ट है कि उपर्युक्त अवतरण में वर्गमूल निकालने के लिए आर्यभट्ट की विधि का अनुसरण किया गया है क्योंकि वर्गमूल के अंक क्रमशः एक-एक करके प्राप्त हुए हैं।

परवर्ती लेखकों ने वर्गमूल निकालने की विधि का अधिक विवरण दिया है। उदाहरणतः, श्रीधर कहते हैं

“(अंतिम) विषमस्थान में (बड़ी से बड़ी मख्या के) वर्ग को घटाओ (जो घट जाय)। उसके बाद वर्गमूल के दूने को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटा कर (नीचे की पक्ति में) रखो, और उससे (दी हुई मख्या के) शेष को भाग दो। प्राप्त लब्धि को (भी नीचे की) पक्ति में रखो। उस (लब्धि) के वर्ग को (दी हुई मख्या के शेष में) घटाओ, और उसके बाद लब्धि को दूना कर दो। (इस प्रकार से) प्राप्त द्विगुणित मख्या को पूर्ववत् एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाकर रखो, और उसमें (दी हुई मख्या के) शेष को भाग दो। अन्त में द्विगुणित मख्या को आधा कर दो। (यही दृष्ट वर्गमूल होगा) ।”

महावीर,^१ आर्यभट्ट द्वितीय,^२ श्रीपति,^३ और भास्कर द्वितीय,^४ की विधियाँ श्रीधर की विधि के अनुरूप हैं।

^१ त्रिशक्तिवत्, पृ० ५। पाटी पर लिखने की विधि की सोदाहरण विवृति के लिए देखिए ए० एन० सिंह, ब्रिटिश कलकत्ता मथेमेटिकल सोसायटी, जिल्द १८, पृ० १२६।

^२ गणित सार-संग्रह, परिक्लम-व्यवहार, श्लोक ३६।

^३ महाभित्तान्त अध्याय १५, श्लोक ६ (उत्तरार्ध) ७।

^४ निटान्तशेखर, अध्याय १३, श्लोक ५। गणित-तिलक श्लोक २३।

लीलावती पृ० ४। भास्कर द्वितीय की पक्ति में द्विगुणित मूल रहता है। जबकि आर्यभट्ट प्रथम की पक्ति में यथार्थ मूल रहता है। देखिए सिंह, पूर्वोक्त।

वर्ग और अवर्ग स्थान ऊर्ध्वावर और धैतिज रेखाओं में चिह्नित करने के बाद वर्गमूल की क्रिया निम्न प्रकार से की जाती है

$$\begin{array}{r}
 1 - 1 - 1 \\
 4 \ 8 \ 6 \ 4 \ 6 \\
 \hline
 \text{वर्ग को घटाने पर} \quad 4 \quad \text{वर्गमूल} = 2 \\
 \text{द्विगुणित वर्गमूल से भाग देने पर } 4) 18 (3 \text{ लव्वि को एक स्थान हटा कर} \\
 \quad 12 \quad \text{रखने पर वर्गमूल} = 23 \\
 \quad \quad 26 \\
 \quad \quad \hline
 \text{लव्वि के वर्ग को घटाने पर} \quad 9 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \text{द्विगुणित मूल से भाग देने पर } 46) 184 (4 \text{ लव्वि को एक स्थान हटा कर रखने} \\
 \quad \quad 184 \quad \text{पर वर्गमूल} = 234 \\
 \quad \quad \quad 16 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \text{लव्वि के वर्ग को घटाने पर} \quad 16 \\
 \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

क्रिया समाप्त हो गयी। वर्गमूल २३४ मिला।

जी० आर० के^१ ने कहा है कि आर्यभट्ट की विधि बीजीय प्रकृति की है और थिअन और अलेक्जेंड्रिया की विधि के अनुरूप है। उनके दोनों कथन अशुद्ध हैं।^२

सिद्धसेन गणि (ल० ५५०ई०) के निम्नलिखित अवतरण से, जो उनकी तत्त्वार्थत्रिगम सूत्र^३ की टीका में उपलब्ध है, निश्चित रूप में सिद्ध होता है कि वर्गमूल निकालने की विधि बीजीय नहीं है। १,००,००० योजन व्यास के वृत्त की परिधि ज्ञात करने के सवध में वे कहते हैं

“व्यास का मान सौ हजार योजन है, उसे १०० हजार से गुणा करने पर उसका वर्ग हो जाता है, इसे पुन १० से गुणा करते हैं और तब उस (गुणनफल) का वर्गमूल निकालते हैं। प्राप्त वर्गमूल वृत्त की परिधि होगा। (वर्गमूल निकालने

^१ देखिए जर्नल ऑफ दि एशियाटिक सोसायटी ऑफ बंगाल, जिल्द ३ और ४, में “नोट्स आन इंडियन मैथेमेटिक्स, १ और २, शीर्षक लेख।

^२ विवरण के लिए देखिए सिंह, पूर्वोक्त, क्लार्क, आर्यभटीय, पृ० २३ आदि भी।

^३ ३ ११।

की विधि से) योजन प्राप्त करने में हमें वर्गमूल (की पक्ति) में क्रमशः ३, १, ६, २, २ और ७ अंक मिलते हैं, और नीचे (अन्तिम लब्धि के रूप में) ६३२४५४-मर्या मिलती है। इसको आधा करने पर तीन लाख सोलह हजार दो सौ मत्ताइस मिलता है। दी हुई मर्या (इसके वर्ग से) कुछ अधिक है, क्योंकि ४८४४७१ शेष बचता है ।”

“इसके अनन्तर ४ में गुणा करने पर ७५६००००००००० की प्राप्ति होती है। इसका वर्गमूल पूर्णज्या का मान है। इसका वर्गमूल निकालने में क्रमशः २, ७, ४, ९, ५, और ४ अंक मिलेंगे। ।”

स्पष्ट है कि उपर्युक्त अवतरण में वर्गमूल निकालने के लिए आर्यभट्ट की विधि का अनुसरण किया गया है क्योंकि वर्गमूल के अंक क्रमशः एक-एक करके प्राप्त हुए हैं।

परवर्ती लेखकों ने वर्गमूल निकालने की विधि का अधिक विवरण दिया है। उदाहरणतः, श्रीधर कहते हैं

“(अंतिम) विषमस्थान में (बड़ी में बड़ी सरया के) वर्ग को घटाओ (जो घट जाय)। उसके बाद वर्गमूल के दूने को एक स्थान (दाहिनी ओर) हटा कर (नीचे की पक्ति में) रखो, और उससे (दी हुई मर्या के) शेष को भाग दो। प्राप्त लब्धि का (भी नीचे की) पक्ति में रखो। उस (लब्धि) के वर्ग को (दी हुई मर्या के शेष में) घटाओ, और उसके बाद लब्धि को दूना कर दो। (इस प्रकार से) प्राप्त द्विगुणित सरया को पूर्ववत् एक स्थान (दाहिनी ओर) हटाकर रखो, और उसमें (दी हुई मर्या के) शेष को भाग दो। अन्त में द्विगुणित मर्या को आधा कर दो। (यही दृष्ट वर्गमूल होगा) ।”^१

महावीर,^२ आर्यभट्ट द्वितीय^३, श्रीपति^४, और भास्कर द्वितीय^५, की विधियाँ श्रीधर की विधि के अनुरूप हैं।

^१ त्रिशतिका, पृ० ५। पाटी पर लिखने की विधि की मोदाहरण विवृति के लिए देखिए ए० एन० सिंह, ग्लेटिन कलकत्ता मथेमेटिकल सोसायटी, जिल्द १८, पृ० १२६।

^२ गणित सार-संग्रह, परिकर्म-व्यवहार, श्लोक ३६।

^३ महाभट्टान्त, अध्याय १५, श्लोक ६ (उत्तरार्ध) ७।

^४ निदान्तशेखर अध्याय १३, श्लोक ५। गणित-तिथ्य श्लोक २३।

^५ लीलावती पृ० ४। भास्कर द्वितीय की पक्ति में द्विगुणित मूल रहता है। जबकि आर्यभट्ट प्रथम की पक्ति में यथार्थ मूल रहता है। देखिए सिंह, पूर्वोक्त।

इस विधि के अनुसार पाटी पर वर्गमूल निकालने की रीति निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण। ५४७५६ का वर्गमूल निकालना।

पहले दी हुई सख्या को पाटी पर लिखते हैं और मम तथा विपम स्थानों पर क्रम से क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं द्वारा सूचित करने हैं, यथा

1-1-1

५४७५६

अन्तिम विपम स्थान ५ में, बड़ी से बड़ी वर्ग सख्या ४ घटायी जा सकती है। अतएव ५ में से ४ घटाते हैं, शेष १ मिलता है। अतएव ५ को मिटा कर उसके स्थान पर १ रखते हैं। इसके बाद द्विगुणित वर्गमूल ($२ \times २ = ४$) को एक स्थान दाहिनी ओर सख्या के नीचे रखते हैं

1-1-1

१४७५६

४

नीचेवाली सख्या ४ से ऊपर की सख्या १४ को भाग देते हैं, ३ लब्धि मिलती है और २ शेष बचता है। ३ को ४ के दाहिनी ओर रखते हैं और १४ को मिटा कर उसके स्थान में २ रखते हैं, इस प्रकार पाटी पर निम्न सख्याएँ होती हैं।

-1-1

२७५६

४३

३ के वर्ग को ऊपर की सख्या २७ में घटाते हैं, १८ शेष बचता है। अतएव २७ को मिटा कर उसके स्थान में १८ रखते हैं। साथ ही साथ ३ को मिटा कर उसके स्थान में ३ का दूना अर्थात् ६ रखते हैं।

-1-1

१८५६

४६

अब ४६ को एक स्थान दाहिनी ओर हटा कर लिखते हैं।

-1-1

१८५६

४६

इसके बाद १८५ को ४६ से भाग देते हैं, ४ लब्धि मिलती है और १ शेष बचता है। ४ को ४६ के दाहिनी ओर रखते हैं और १८५ को मिटा कर उसके स्थान में १ रखते हैं।

- 1

१६

४६४

अब ४ के वर्ग को १६ में घटाते हैं, शेष ० बचता है। अतएव १६ को मिटा देते हैं। इसके बाद ४ को दूना करके रखते हैं।

४६८

यह द्विगुणित वर्गमूल है। इसको आधा करने पर २३४ मिलता है जो इष्ट वर्गमूल है।

प्रतीत होता है कि हिन्दू अंको के साथ वर्गमूल निकालने की उपर्युक्त विधि भी ८वीं शताब्दी के लगभग अरब को पहुँचायी गयी थी, क्योंकि यह विधि गणित के अरबी ग्रन्थों में बिल्कुल इसी स्वरूप में मिलती है।^१

पूरवाख (१४२३-१४६१ ई०), शूके (१४८४ ई०) लारोश (१५२० ई०), गेमा फ्रिमियस (१५४० ई०), कतानिओ (१५४६ ई०) इत्यादि यूरोपीय लेखकों के ग्रन्थों में भी यह विधि इसी स्वरूप में मिलती है।

० घनमूल।

परिभाषा

इस परिकर के लिए हिन्दू गणित में दो शब्द प्रयुक्त हुए हैं, घनमूल और घनपद। इन शब्दों की व्याख्या की जा चुकी है।

कारण

इस परिकर का वर्णन सर्वप्रथम जार्यभटीय में मिलता है। परन्तु यह वर्णन अत्यन्त संक्षेप में है।

“(अन्तिम घन स्थान में सबसे बड़ी घन संख्या घटाओ। इसके बाद) द्वितीय अघन (स्थान) से (आरम्भ करके जो संख्या बाकी ओर हो उसे) घनमूल के दश के तिगुने से भाग दो। (इसके बाद) प्रथम घन में (आरम्भ करके बायीं

^१ उदाहरणार्थ, अल्-नसवी (१०२५ ई०)। देखिए सूटर, विन्डिग्रोयेका मैथे-गेटिवा, जिल्द ७, पृ० ११४ और वेबे, जर्नल एशियाटिक जिल्द १, १८६३।

^२ देखिए स्मिथ, हिस्ट्री, जिल्द २, पृ० १४४-१४८।

और जो सख्या हो उसमें से) त्रिगुणित घनमूल के गुणनफल को, तथा (अगले) घनस्थान से लव्वि के घन को घटाओ।”^१

टीकाकारों की व्याख्या के अनुसार, डकार्ड का स्थान घन स्थान है, दहाई का स्थान प्रथम अघन स्थान है, मकडे का स्थान द्वितीय अघन स्थान है, हजार का स्थान घनस्थान है, दस हजार का स्थान प्रथम अघन स्थान है, इत्यादि।^२ दी हुई सख्या के ऊपर घन, प्रथम अघन और द्वितीय अघन स्थानों के चिह्न लगाने के बाद, घनमूल निकालने की क्रिया का आरम्भ अंतिम घन (स्थान) में सबसे बड़ी घन सख्या के घटाने में होता है। यद्यपि यह क्रिया उपर्युक्त नियम में स्पष्टतया नहीं वर्णन की गयी है, तो भी टीकाकारों का मत है कि ‘घनरय मूलवर्गेण’ कहने में यह क्रिया निहित है। उपर्युक्त विधि निम्नोदाहरण में स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण। १९५३१२५ का घनमूल निकालना।

अंकों के ऊपर घन और अघन के चिह्न लगाने के बाद घनमूल की क्रिया का क्रम इस प्रकार है

	घ	अ	अ	घ	अ	अ	घ
	१	९	५	३	१	२	५
घन घटाने पर	१						(ग) घनमूल = १
घनमूल के वर्ग के त्रिगुने				३)	९	(२)	(अ) घनमूल के बाद
(अर्थात् ३×१^३) में भाग देने पर					६		लव्वि रखने पर मिलता है
लव्वि वर्ग और त्रिगुणित घनमूल के					३५		१२
गुणनफल ($३ \times १ \times २^३$) को घटाने पर					१२	(ब)	
लव्वि के घन (अर्थात् $२^३$) को					२३३		
घटाने पर					८	(ग)	

^१ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लोक ५। इस नियम का अनुवाद रोडे, के, सिंह, क्लार्क, सेनगुप्त, आदि ने किया है। के का अनुवाद नितान्त अशुद्ध है। अन्य अनुवाद स्वतंत्र होते हुए भी परिणामतः शुद्ध हैं। क्लार्क का ‘दि (प्रिंसीपिंग) घन’ प्रयोग कुछ भ्रमात्मक है।

^२ भाग देने में लव्वि इतनी बड़ी लेना चाहिए कि अगली दो क्रियाएँ (ब) और (ग) की जा सकें।

घनमूल के वर्ग के तिगुन (अर्थात् ४३२) २०५१) ५	(अ) घनमूल १० के अग्रे
३×१२^३) से भाग देने पर	२१६० लब्धि लिखने पर
त्रिगुणित घनमूल और लब्धि वर्ग के गुणन	९१२ मिलता है १२५
फल (अर्थात् $३ \times १२ \times ५^३$) को घटाने पर	९०० (ब)
	१२५
लब्धि के घन (अर्थात् $५^३$) को घटाने पर	१२५ (ग)

इस प्रकार घनमूल = १०५

उपर्युक्त उदाहरण में स्पष्ट है कि घनमूल निकालने की आधुनिक विधि आर्य-भट्ट की विधि का लघुरूप है।

ऊपर दी हुई विधि हिन्दू गणित के सब ग्रंथों में मिलती है। उदाहरणतः, ब्रह्मगुप्त कहते हैं,

“(अंतिम घन स्थान पर्यन्त मस्या में सबसे बड़ी घन मरया घटाने के बाद) द्वितीय अघन स्थान में (आरम्भ करके बायी ओर) जो मस्या हो उसको घनमूल के वर्ग के तिगुने में भाग दो। प्राप्त लब्धि के वर्ग और त्रिगुणित घनमूल के गुणनफल को प्रथम अघन (पर्यन्त मस्या) में और तत्पश्चात् लब्धि के घन को घन (स्थान पर्यन्त मस्या) में घटाओ। ऐसा (बार बार) करने पर घनमूल प्राप्त होगा।”

श्रीधर ने पाटी पर की जानेवाली प्रक्रिया का अधिक विस्तृत विवरण दिया है। वह इस प्रकार है

“(स्वार्थ से आरम्भ करके क्रमशः) एक घन स्थान होता है और दो अपन स्थान होते हैं। (दी हुई मस्या के अंशों के ऊपर घन और अपन चिह्नों का अंकित करो)। (अंतिम) घन स्थान में से (सबसे बड़ी) घन मरया घटाओ। घनमूल का नीच पद (अर्थात् द्वितीय अघन स्थान) के नीचे रखकर, (द्वितीय अघन स्थान को) घनमूल के वर्ग के तिगुने में भाग दो। लब्धि को (घनमूल की)

पक्ति में (घनमूल के दाहिनी ओर) रखकर उसके वर्ग को त्रिगुणित अन्त्य (घनमूल) से गुणा करके ऊपर की सख्या में घटाओ।^१ पुन (पवितवाली सख्या का घनमूल मानकर) '(घनमूल को) तृतीय पद (अर्थात् द्वितीय अघन स्थान) के नीचे रखो' वाली विधि का प्रयोग करो। यही घनमूल निकालने की विधि है।"^२

आर्यभट्ट द्वितीय ने श्रीधर का अनुकरण किया है और घनमूल निकालने की विधि को निम्न प्रकार वर्णित किया है

"(इकाई से आरम्भ करके) पदों (अर्थात् स्थानों) की क्रम से 'घन', 'भाज्य' और 'शोध्य' सजाएँ होती हैं। (अन्तिम) घन स्थान से (सबसे बड़ी) घन सख्या को घटाना चाहिए। घनमूल को 'भाज्य' पद के नीचे रखकर, उस पद को त्रिगुणित घनमूल वर्ग से भाग देना चाहिए, और लब्धि को (घनमूल की) पवित में रखकर उसके वर्ग को त्रिगुणित पूर्व (अर्थात् घनमूल) से गुणा करके शोध्य से, और (लब्धि के) घन को घन-पद से घटाना चाहिए। (इस प्रकार में) प्राप्त (आशिक) घनमूल को शोध्य के नीचे रखकर पुन उपर्युक्त क्रिया करनी चाहिए।"^३

जिस सख्या का घनमूल निकालना होता है उसके अंको को (इकाई से आरम्भ करके) तीन तीन अंको के समूह में विभक्त करते हैं (जिन्हें क्रम से घन, अघन और अघन कहते हैं)। बायी ओर से आरम्भ करके अन्तिम घन पर्यन्त सख्या में इष्ट घनमूल का पहला अंक (बायी ओर से गणना करने पर) मिलता है। दाहिनी ओर के अगले तीन अंको से घनमूल का दूसरा अंक मिलता है, और इसी प्रकार आगे के तीन तीन अंको से घनमूल के अन्य अंक प्राप्त होते हैं। जब क्रिया पाटी पर की जाती है, तब सख्या के अंको के ऊपर घन और अघन के चिह्न लगा देते हैं, और उसके बाद निम्न रीति से क्रिया करते हैं

उदाहरण। १९५३१२५ का घनमूल निकालना।

पहले सख्या को लिखते हैं और अंको के ऊपर घन और अघन चिह्न लगाते हैं

घ अ अ घ अ अ घ

१ ९ ५ ३ १ २ ५

^१ नीचे की पक्ति में लिखे हुए घनमूल को 'अन्त्य' और लब्धि को 'आदि' कहा गया है।

^२ त्रिशतिका, पृ० ६ आदि।

^३ महासिद्धान्त, पृ० १४५।

अन्तिम घन स्थान से (जिसके ऊपर घ लिखा है) बड़ी से बड़ी घन संख्या घटाते ह। यहाँ पर १^१ घटावेगे। घटाने से शून्य वचता है। इसलिए १ को मिटा देते हैं। १^१ के घनमूल १ को द्वितीय अघन (अर्थात् अन्तिम घन स्थान के दाहिनी ओर वाले स्थान) के नीचे लिखते हैं।

घ	अ	अ	घ	अ	अ	घ	३) ९ (२
९	५	३	१	२	५		६
१							<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> ३

घनमूल का दूसरा अंक प्राप्त करने के लिए द्वितीय अघन स्थानवाली संख्या ९ को घनमूल के वर्ग के तिगुने (अर्थात् $३ \times १^२ = ३$) से भाग देते हैं। (ध्यान रखना चाहिए कि भाग नि शेष न होना चाहिए)। लब्धि २ मिलती है जिसे प्रथम अघन स्थान के नीचे लिखते हैं, और शेष ३ वचता है, जिसको ९ को मिटाकर उसके स्थान में रखते हैं। इस प्रकार पाटी पर निम्न संख्याएँ होती हैं,

घ	अ	अ	घ	अ	अ	घ	३५
३	५	३	१	२	५		१२
१	२						<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> २३

नीचे की पक्तिवाली संख्या १२ के २ को आदि और १ को अन्त्य कहते हैं। अब त्रिगुणित घनमूल और आदिवर्ग के गुणनफल को प्रथम अघन पर्यन्त संख्या (अर्थात् ३५) में घटाते हैं, शेष २३ वचता है। अतएव ३५ को मिटा देते हैं और उसके स्थान में २३ लिखते हैं।

अ	अ	घ	अ	अ	घ	
२	३	३	१	२	५	२३३
१	२					<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> ०
						२०५

इसके बाद आदि के घन (अर्थात् ८) को घन स्थानवाली संख्या में घटाते हैं, शेष २२५ वचता है। अतएव २३३ को मिटाकर उसके स्थान में २०५ लिखते हैं।

अ	अ	घ	अ	अ	घ
२	२	५	१	२	५
१	२				

त्रिया का एक चक्र अब समाप्त हो गया। अतएव नीचे की संख्या १० को घनमूल मान कर उपर्युक्त त्रिया की पुनरावृत्ति करेंगे हैं। पङ्क्ति १० को द्वितीय अघन स्थान के नीचे लिखते हैं। पाटी पर अब निम्न संख्याएँ होती हैं,

अ	अ	घ	अ	अ	घ	
२	२	५	१	२	५	४३२) २२५१ (५
		१	२			२१६०
						<hr/> ९१

अब पूर्ववत् घनमूल-वर्ग के तिगुने (अर्थात् $३ \times १२^२ = ४३२$) से २२५१ को भाग देने हैं, लब्धि ५ को प्रथम अघन के नीचे लिखते हैं और शेष ९१ को २२५१ को मिटाकर उसके स्थान में लिखते हैं। इस प्रकार पाटी पर अब निम्न सख्याएँ होती हैं।

घ	अ	अ	घ	९१२
१	१	२	५	९००
१	०	५		<hr/> १२

अब १२ को अन्त्य और ५ को आदि कल्पना करते हैं। त्रिगुणित अन्त्य और आदि-वर्ग के गुणनफल (अर्थात् $३ \times १२ \times ५^२ = ९००$) को द्वितीय अघन स्थान (अर्थात् ९१२) में घटाते हैं, शेष १२ बचता है। अतएव ९१२ को मिटाकर उसके स्थान में १२ लिखते हैं। इस प्रकार पाटी पर निम्न सख्याएँ होनी हैं।

अ	अ	घ	
१	२	५	१२५
१	२	५	<hr/> १२५
			०

अब आदि के घन (अर्थात् $५^३ = १२५$) को घन स्थान से घटाते हैं, शेष ० बचता है। अतएव १२५ को मिटा देते हैं। अब पाटी पर केवल द्वितीय पञ्चि शेष बचती है।

१२५

यही सख्या इष्ट घनमूल है। शेष शून्य होने के कारण यह पूर्ण घनमूल है।

पाटी पर लिखी हुई सख्याओं को बार-बार मिटाते रहने का कारण यह है कि पाटी इतनी बड़ी नहीं होती कि संपूर्ण क्रिया के अक उम पर लिखे जा सकें। अकसमूह के तीनों अक एक साथ लिखे जाते हैं। भाग करने और घटाने की क्रिया अको को अन्यत्र पाटी पर लिखकर की जाती थी (जैसा कि ऊपर के उदाहरण में किया गया है), और बाद में मूल सख्या को मिटा कर आवश्यक परिवर्तन किये जाते थे।

१० क्रिया की शुद्धता की परीक्षा

गणितीय परिकर्मों की अनुलोम और विलोम दोनों विधियों में प्राप्त परिणामों की शुद्धता की परीक्षा करने का नियम सबसे पहले महा-सिद्धान्त में मिलता है जहाँ पर इसका निम्न प्रकार से वर्णन किया गया है ^१

“गुण्य, गुणक और गुणनफल प्रत्येक के अपने अको को अलग अलग तब तक जोड़ो जब तक जोड़ एक अक का न हो जाय”, इसी प्रकार भाज्य, भाजक और लव्धि प्रत्येक के अपने अको को भी अलग अलग जोड़ो। यदि गुण्य और गुणक (के उक्त योगों) के गुणनफल के अको का योग, गुणनफल (के अको के योग) के तुल्य हो, तो (समझना चाहिए कि) गुणन शुद्ध है, यदि लव्धि और भाजक के (योगों के) गुणनफल में शेष (के अको) का योग जोड़ देने पर जो मर्या आवे उसके (अको के योग के) बराबर, भाज्य (का योग) हो, तो (समझना चाहिए कि) लव्धि और शेष शुद्ध है (अर्थात् भाग शुद्ध है)। वर्गमर्या के अपने अको का योग यदि वर्गमूल के (अपने अको के जोड़ के) वर्ग वन शेष के तुल्य हो, तो (समझना चाहिए कि) वर्ग और वर्गमूल शुद्ध है। घन (के अपने अको) का योग यदि घनमूल (के अको) के योग के घन घन शेष के तुल्य हो, तो (समझना चाहिए कि) घन और घनमूल तथा शेष शुद्ध है। यह गुणन इत्यादि की (शुद्धता की परीक्षा करने की) सरल जोधनिका (कर्मिणी) है।”

उपयुक्त नियमों की उत्पत्ति निम्नलिखित विवेचन में स्पष्ट हो जायगी। मान लो कि

$$n = p_1 p_2 \dots p_r$$

$$p_1 p_2 \dots p_r$$

दशमलव प्रवेन में लिखी हुई म अको की मर्या है। मान लो कि इस मर्या के अको का योग m_1 है, और m_1 के अको का जोड़ m_2 है, इत्यादि। अतएव

$$n = p_1 + 10p_2 + \dots$$

$$+ 10^{r-1} p_r,$$

^१ महा-सिद्धान्त, पृ. २४५।

^२ अर्थात् पहले सर्या के अको को जोड़ो, इसके बाद जोड़ करने में प्राप्त मर्या के अको को जोड़ो, और यह क्रिया तब तक करो जब तक एक अक की मर्या न प्राप्त हो जाय।

$$\text{और } s_1 = p_1 + p_2 + \dots + p_m$$

अतएव, घटाने पर

$$n - s_1 = 9(p_2 + 11p_3 + \dots),$$

इसलिए

$$n \equiv s_1 \quad (\text{मापांक } 9)$$

इसी प्रकार

$$s_1 \equiv s_2 \quad (\text{मापांक } 9)$$

$$s_2 \equiv s_3 \quad (\text{मापांक } 9)$$

$$s_{r-1} \equiv s_r \quad (\text{मापांक } 9)$$

जहाँ पर s_r केवल एक अंक की संख्या है, जो कि या तो ९ के बराबर है या ० में छोटी है। मान लो कि यह अंक n' है। तो

$$n \equiv n' \quad (\text{मापांक } 9)$$

अतएव यह सिद्ध हुआ कि किसी संख्या के अंको को बार-बार जोड़ने से जो अंक प्राप्त होता है वह उस संख्या को ९ से भाग देने से प्राप्त शेष के तुल्य होता है।

अब, संख्या ना की कल्पना करो जो उस संख्या के तुल्य है जो ५ अन्य संख्याओं n_1, n_2, \dots, n के गुणनफल में अन्य संख्या रा को जोड़ने या घटाने से प्राप्त होती है। तो हम लिख सकते हैं कि--

$$na = n_1 n_2 \dots n_p \pm r$$

अब, मान लो कि

$$n_1 \equiv n'_1 \quad (\text{मापांक } 9)$$

$$n_2 \equiv n'_2 \quad (\text{मापांक } 9)$$

.

..

$$n_p \equiv n'_p \quad (\text{मापांक } 9)$$

इनको गुणा करने पर,

$$n_1 n_2 \dots n_p \equiv n'_1 n'_2 \dots n'_p \quad (\text{मापांक } 9)$$

युनश्च, यदि

$$रा \equiv र' \quad (\text{मापाक } ९)$$

तो

$$न_१ न_२ \dots \dots न_p \pm रा \equiv न'_१ न'_२ \dots \dots न'_p \pm र' \quad (\text{मापाक } ९)$$

अतएव

$$ना \equiv न'_१ न'_२ \quad न'_p \pm र' \quad (\text{मापाक } ९)$$

विशेष रूप से, यदि

$$न_१ = न_२ \quad = न_p = न,$$

तो

$$न'_१ = न'_२ = \quad = न'_p = न'$$

अतएव

$$ना = न_p \pm रा$$

$$\text{और} \quad ना \equiv न'_p \pm र' \quad (\text{मापाक } ९)$$

उपर्युक्त विवेचन से महा-सिद्धान्त के नियमों की सत्यता का निरूपण हो जाता है।

गुणन की शुद्धता की परीक्षा करने का निम्नलिखित नियम नारायण ने दिया है १

“गुण्य और गुणक दोनों को (अलग-अलग) किसी कल्पित मर्या में भाग देकर जो धोप मिले उनके गुणनफल को कल्पित मर्या में भाग दो। उपलब्ध धोप यदि उस धोप के बराबर हो जो (गुण्य और गुणक के) गुणनफल को कल्पित मर्या में भाग देने पर मिलता है तो (समझना चाहिए कि गुणन) शुद्ध है।”

यहाँ पर यह देखने योग्य है कि ९ अंक में भाग देकर गणित-शुद्धि की परीक्षा करने के सम्पूर्ण नियम पहले पहल भारतवर्ष में मिलने हैं। गुणन और भाग की क्रियाओं के परीक्षण के नियम सम्भवतः हिन्दुओं को बहुत पहले से ज्ञान है। परन्तु जब इन परीक्षणों की गणना मौलिक पन्क्तिों में नहीं की जानी थी, इसलिए वे

‘इस नियम को सुधाकर द्विवेदी ने उद्धृत किया है। देखिए सुधाकर द्विवेदी, गणित का निदान (हिन्दी में), बनारस १९१०, पृ० ७६।

पाटी-गणित के ग्रंथों में नहीं दिये गये हैं।^१ कदाचित् नारायण ही पहले गणितज्ञ हैं जिन्होंने किसी भी सख्या में भाग देकर गणित की शुद्धता के परीक्षण का नियम दिया है।

प्रारम्भिक अरब लेखकों के ग्रंथों में ९ में भाग देकर गुणन और निशेष भाग के परीक्षण के नियम मिलते हैं परन्तु अब परिकर्मों की शुद्धता की परीक्षा करने के संपूर्ण नियम सबसे पहले अविसेन्न^२ (ल० १०२० ई०) के ग्रंथों में मिलते हैं, जिन्होंने अपने नियमों को 'हिन्दू' नियम कहा है। मैक्सिमस 'प्लानुडेस'^३ ने भी नीचे भाग देनेवाले नियम को हिन्दू-व्युत्पत्ति का बताया है।

अतएव नीचे भाग देकर गणितशुद्धि की परीक्षा करने के नियम की हिन्दू व्युत्पत्ति के विषय में कोई सन्देह नहीं है। आर्यभट्ट द्वितीय के पहले इसका प्रयोग सम्भवतः गुणन और भाग के परीक्षण में किया जाता था। जब इसका पदार्पण अरब में हुआ तब कदाचित् वह इसी अपूर्ण अवस्था में था। उसके बाद सम्भवतः अरबों और हिन्दुओं दोनों ने अलग-अलग इसको पूर्ण किया। अरबों और मह-सिद्धान्तकार आर्यभट्ट द्वितीय के नियमों की विभिन्नता का कदाचित् यही कारण है।^४ तथापि यह निश्चित है कि हिन्दुओं ने उक्त नियम को अरबों से नहीं पाया, क्योंकि आर्यभट्ट द्वितीय का ग्रंथ अविमेष के पहले

^१ उपर्युक्त ग्रंथों के अतिरिक्त भास्कर द्वितीय कृत करणकुतूहल की सुमतिहर्ष (१६१६ ई०) कृत टीका में तथा सूर्यसिद्धान्त की भूधर-कृत टीका में भी अंक के आधार पर गणित की शुद्धता के परीक्षण के लिए किसी प्राचीन लेखक जीवदत्त (वीजदत्त ?) का निम्नलिखित नियम उद्धृत किया गया है।

“गुण्य और गुणक (दोनों को अलग-अलग) ६ से भाग देने पर जो शेष आये, उनके गुणनफल को ६ से भाग दो। यदि उपलब्ध शेष, गुण्य और गुणक के घात को ६ से भाग देने से प्राप्त शेष के तुल्य हो तो गणित की शुद्ध कहना चाहिए।” देखिए, करणकुतूहल, (माधव शास्त्री द्वारा संपादित, बम्बई १६०१), अध्याय १, श्लोक ७ पर सुमति हर्ष की टीका, सूर्यसिद्धान्त पर भूधर की टीका।

^२ एफ० वेपके, जर्नल एशियाटिक (६), जिल्द १, १८६३ पृ० ५०० आदि।

^३ देखिए, डेलाम्बर, हिस्ट्री डे ल ऐस्ट्रानमी ऐन्पियन, जिल्द १, पेरिस, १८१७, पृ० ५१८ आदि।

^४ देखिए बी० दत्त, जर्नल एशियाटिक सोसाइटी ऑफ बंगाल जिल्द २, १६२७, पृ० २६५।

का है। वेहाउहीन^१ (ल० १६०० ई०) ने नीं मे भाग देकर गणितीय त्रियाओं की परीक्षा का जो नियम दिया है उसी प्रकार का है जैसा कि आर्यभट्ट द्वितीय का।

११ भिन्न

प्रारम्भिक प्रयोग

भारतवर्ष में भिन्नो का ज्ञान बहुत प्राचीन काल से मिलता है। प्राचीनतम ग्रंथ ऋग्वेद में ३ (अर्ध) और ३ (त्रिपाद^२) भिन्नो का प्रयोग किया गया है। मैत्रायणी-संहिता^३ में एक स्थान पर ११ (कला), १२ (कुष्ठ), ३ (शफ), और ३ (पाद) भिन्नो की चर्चा आयी है। गणित के प्राचीनतम ज्ञात ग्रंथ, शुल्ब सूत्र, में भिन्नो का केवल कथन ही नहीं बल्कि प्रश्नों के न्यास और करण में प्रयोग भी किया गया है।^४

लोगो का कथन है कि मिस्र और बाबुल के प्राचीन निवासियों ने एक अश-वाली भिन्नो का प्रयोग किया था, परन्तु ऐसा कोई भी प्रमाण नहीं मिलता जिसमें सिद्ध हो सके कि उन लोगो ने यौगिक भिन्नो का प्रयोग किया था। यौगिक भिन्न का सबसे प्राचीन ज्ञात उदाहरण ऋग्वेद में मिलनेवाली भिन्न ३ है। मन्त्र के 'त्रिपाद' शब्द का अर्थ "तीन पद" है। परन्तु जब इसका प्रयोग अक के अर्थ में किया जाता है तब यह भिन्न, किसी वस्तु के उस भाग को सूचित करता है जिसका पूरा वस्तु से वही अनुपात होता है जो चतुष्पद के तीन पैरों का उसके चार पैरों से होता है। तथापि पाद शब्द एक शब्दक है जो भिन्न ३ को सूचित करता है, और त्रिपाद शब्द की व्युत्पत्ति ठीक उसी प्रकार हुई है जिस प्रकार अंग्रेजी के शब्द 'थ्री फोथर्स' की।^५ शुल्ब ग्रंथों में एक अशवाली भिन्नो को सूचित करने के लिए अश-वाचक शब्द के साथ 'भाग' अथवा 'अंश' शब्द का प्रयोग किया गया है, उदाहरणतः पचदश-भाग का अर्थ है १५, सप्तभाग का अर्थ है ७, इत्यादि। भाग अथवा

^१ खोलासात अल-हिमाव ए० मारे कृत प्राचीनी अनुवाद, न्यू० अनाल्स ऑफ़ मैथेमेटिक्स, जिल्ड ५, १८४६, पृ० २६३।

^२ ऋग्वेद, १० ६० ४।

^३ ३ ७ ७।

^४ दी० दत्त, शुल्ब, पृ० २१२ आदि।

^५ त्रि=तीन, और पाद=चतुर्पाद।

^६ आपस्तम्ब शुल्ब, १० ३, वात्स्यायन शुल्ब ५ ८।

^७ वात्स्यायन शुल्ब, ६४।

अश के साथ क्रमसूचक सख्याओं का प्रयोग भी बहुतायत से मिलता है, उदाहरणतः, पचमभाग का अर्थ है $\frac{1}{5}$ ।^१ कभी-कभी, भभवत्, छद की सुविधा के लिए, भाग शब्द की उपेक्षा कर दी जाती है।^२ $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ यौगिक भिन्नो को क्रमशः त्रि-अष्टम (त्र्यष्टम) और द्वि-सप्त से व्यजित किया गया है। वक्षाली हस्तलिपि में $\frac{2}{3}$ को त्र्यष्ट से और $\frac{3}{4}$ को त्र्यष्ट्यष्ट से सूचित किया गया है।^३ उपर्युक्त सिद्धान्त के आधार पर बने हुए भिन्न-सूचक शब्द परवर्ती ग्रंथों में इतनी प्रचुर मात्रा में मिलने हैं कि उनको यहाँ उदाहृत करने की कोई आवश्यकता नहीं है। अतएव भिन्नो को व्यजित करने की आधुनिक रीति हिन्दू स्रोतों के आधार पर व्युत्पन्न हुई है और इसके चिह्न ३००० ई० पू० तक दृष्टिगोचर होते हैं।

नाप और तौल

भिन्नात्मक राशियों के प्रयोग से बचने के लिए सभी सम्य देशों में लवाई, तौल और मुद्रा इत्यादि की इकाइयों को छोटी इकाइयों में विभाजित करने की सामान्य प्रथा है। इससे वाणिज्य की प्रगति तथा वाणिज्य सब्धी गणित की उन्नति का पता चलता है। हिन्दुओं ने नाप और तौल की पद्धतियों का प्रयोग प्राचीनतम काल से किया है। शतपथ ब्राह्मण* (ल० २००० ई० पू०) में काल-विभाग का अत्यंत सूक्ष्म वर्णन मिलता है। इसके अनुसार एक दिन में ३० मुहूर्त होते हैं, एक मुहूर्त में १५ क्षिप्र होते हैं, एक क्षिप्र में १५ एतहि होते हैं, १ एतहि में १५ इदानी होती है, और १ इदानी में १५ प्राण होते हैं। इस प्रकार एक प्राण का मान लगभग $\frac{1}{16}$ सेकंड के बराबर हुआ। प्राचीन हिन्दुओं के पास समय के इतने सूक्ष्म विभागों को नापने के उपकरण होने की संभावना नहीं है। ये विभाग पूर्णतया सैद्धान्तिक हैं और इनका विकास दार्शनिक कारणों से हुआ। तथापि इससे प्रकट होता है कि प्राचीन काल में ही हिन्दुओं के पास भिन्न सबन्धी सतोपजनक अकगणित अवश्य

^१ आपस्तम्ब शुल्ब, ६ ७; १० २, कात्यायन शुल्ब, ५६।

^२ १ अशवाली भिन्नो में केवल हर का ही कथन किया गया है। यह प्रथा वाद के ग्रंथों में भी सामान्यरूप से मिलती है, उदाहरणार्थ, लीलावती, पृ० ७, में षष्ठ = $\frac{1}{6}$ ।

^३ वक्षाली हस्तलिपि पत्र १०(ब)।

^४ १२ ३ २ १।

रहा होगा। कांटिल्य के अर्थशास्त्र^१ में एक प्रकरण ऐसा है जिसमें चौथी शताब्दी ई० पू० में भारतवर्ष में प्रयोग की जानेवाली नापो और तौलो का विवरण दिया गया है। ललितविस्तर^२ में बताया गया है कि बृद्ध ने निम्नलिखित रेखा मापो का उपदेग किया था।

७ परमाणु-रज	=	१ रेणु
७ रेणु	=	१ वृटि
७ वृटि	=	१ वातायन-रज
७ वातायन-रज	=	१ गग-रज
७ गग-रज	=	१ एडक-रज
७ एडक-रज	=	१ गोरज
७ गोरज	=	१ लिद्धा-रज
७ लिद्धा-रज	=	१ मपप
७ मपप	=	१ यव
७ यव	=	१ अगुली-पर्व
१२ अगुली पर्व	=	१ वितस्ति
२ वितस्ति	=	१ हस्त
४ हस्त	=	१ धनु
१००० धनु	=	१ क्रोश
४ क्रोश	=	१ योजन

उपर्युक्त सारिणी के अनुसार, लम्बाई की सबसे छोटी टिहू माप एक परमाणु^३ है जो १×७^{-१०} इंच के बराबर है।

पाटीगणित-विषयक सब ग्रंथ, उन उन ग्रंथों में प्रयुक्त नाप और तौल की परिभाषाओं में आरम्भ होते हैं। पहले के ग्रंथों में वर्गीसवर्णन नामक एक

^१ दिअशास्त्र ऑव कांटिल्य आर० शाम शास्त्री द्वारा संपादित, बंगलौर, १९१९

^२ ललित विस्तर आर० मित्र द्वारा संपादित, कलकत्ता, १८७८, पृ० १६८।

^३ नामने छोटे द्रव्याणु को परमाणु कहते हैं। अन्तर्गत हिन्दुओं के मत में एक का घ्यास १×७^{-१०} होता है।

विशेष विषय मिलता है।^१ यह ध्यान देने योग्य है कि भिन्न-भिन्न ग्रन्थों में वर्णित नाप और तौल की इकाइयाँ एक दूसरे में भिन्न हैं। ये वे इकाइयाँ हैं जो ग्रन्थ रचे जाने के समय उस स्थान में प्रचलित थी जहाँ ग्रन्थ लिखा गया था।

परिभाषा

भिन्न शब्द का शाब्दिक अर्थ है 'टूटा हुआ'। यूरोपीय शब्द 'फ्रैक्शियो', 'फ्रैक्शन', 'राउण्ड', 'रोटो' और 'रोकटो' इत्यादि 'भिन्न' शब्द के अनुवाद हैं, जो कि लैटिन शब्द 'फ्रैक्टस' (फ्रैन्जिएर) अथवा 'रुप्टम' (अर्थ 'टूटा हुआ') में व्युत्पन्न किये गये हैं। हिन्दू शब्द भिन्न का अधिक व्यापक अर्थ है क्योंकि

$$\left(\frac{अ}{ब} \pm \frac{स}{द}\right), \left(\frac{अ}{ब} \text{ का } \frac{स}{द}\right), \left(\frac{अ}{ब} \pm \frac{स}{द} \text{ का } \frac{अ}{ब}\right) \text{ अथवा } \left(अ + \frac{व}{म}\right)$$

स्वरूप इसमें सम्मिलित है। इन स्वरूपों को 'जाति' कहते हैं और हिन्दू ग्रन्थों में इनको सरल करने की विशेष विधियाँ मिलती हैं। श्रीधर और महावीर ने छ प्रकार की जातियों का वर्णन किया है, जबकि ब्रह्मगुप्त ने केवल पाँच जातियों की, तथा भास्कर द्वितीय ने, स्कन्दसेन का अनुसरण करके, केवल चार जातियों की कल्पना की है। भिन्नो को जातियों में विभाजन करने की आवश्यकता इसलिए पड़ी कि गणितात्मक परिष्कारों को सूचित करने के लिए उनके पास उपयुक्त चिह्न नहीं थे। हिन्दुओं ने केवल एक ही ऐसे चिह्न का प्रयोग किया है, और वह चिह्न है ऋणसूचक विन्दु।^२

भिन्न के अर्थ में 'भाग' और 'अंश' शब्दों का भी प्रयोग किया गया है। 'कला' शब्द जो वैदिक काल में ऋद्धि के लिए प्रयुक्त किया जाता था, बाद में भिन्न का पर्याय माना जाने लगा। भिन्न के अर्थ में इसका प्रयोग सर्वप्रथम गुप्ता-ग्रन्थों में हुआ है।

^१ वल्ली-सर्वर्णन से तात्पर्य ऐसी क्रिया से है जो रूपया, आना, पाई को रुपये बनाने में प्रयुक्त की जाती है। वल्लीसर्वर्णन की विधि त्रिशतिका (पृ० १२) और गणिततिलक (पृ० ३६) में मिलती है। बाद के ग्रन्थों में इस विधि का वर्णन नहीं है।

^२ जो साधारणतया घटाये जानेवाले अंक के ऊपर लिखा जाता था।

भिन्नो का लेखन

अत्यन्त प्राचीन काल में ही हिन्दू लोग भिन्नो को उसी प्रकार से लिखते आ रहे हैं, जैसे आजकल हम लोग लिखते हैं, परन्तु वे अंश और हर को विभाजित करने वाली रेखा का व्यवहार नहीं करते थे। जब कभी एक ही प्रश्न में बहुत नी भिन्ने होती थी, तब वे उन्हें ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज रेखाओं द्वारा अलग कर देते थे। भिन्नो को लिखने की हिन्दू रीति के उदाहरण आगे दिये गये हैं।

भिन्नो का अपवर्तन

गणितीय परिकर्म करने के पूर्व भिन्नो को अपवर्तित करना आवश्यक समझा जाता था। परन्तु अपवर्तन की क्रिया को परिकर्म नहीं माना जाता था। यह क्रिया गणित की पुस्तकों में नहीं मिलती, परन्तु सम्भवतः मौखिक रूप में इसका उपदेश किया जाता था। इसमें सदेह नहीं कि ईसा की प्रारम्भिक गताब्दियों में ही यह नियम प्रचलित था, क्योंकि उमास्वातिकृत तत्त्वार्थ-विगमसूत्र-भाष्य^१ में एक स्थान पर दार्शनिक विवेचन की व्याख्या करते समय दृष्टान्त रूप में इसकी चर्चा की गयी है

“अथवा, जिस प्रकार, भिन्नो को सरल करते समय, कुशल गणितज्ञ द्वारा अंश और हर का अपवर्तन कर देने पर भी भिन्न के मान में कोई अन्तर नहीं पड़ता, उसी प्रकार ।”

भिन्नो का समच्छेदीकरण^२ ('समहर करना')

समच्छेदीकरण की आवश्यकता तब पड़ती है जब भिन्नो को जोड़ना या घटाना होता है। इस क्रिया का विशेष महत्त्व प्रदान किया गया है और माभारतयामा इसे सकलित और व्यवकलित के परिकर्मों के साथ-साथ बताया जाता है। ब्रह्म-सूत्र^३ ने सकलित और व्यवकलित के परिकर्मों के साथ-साथ समच्छेदीकरण की विधि का निम्न प्रकार में वर्णन किया है

“प्रत्येक (भिन्नात्मक) राशि के अंश और हर को अन्य (भिन्नात्मक) राशि के छेद में गुणा करो, तो वे दोनों (राशियाँ) समहर हो जायेंगी। यदि उनमें

^१ २५२।

^२ समच्छेदीकरण के अन्य पर्याय हैं—इत्तामद्वर्तन, मद्राजन, और समच्छेद-दिधि।

^३ ब्राह्म-सूत्र-भाष्य पृ. १८८।

जोड़ना हो तो उनके अशो को जोड़ दो, यदि घटाना हो तो उनके अशो को घटा दो।”

श्रीधर का कथन है ^१

“(भिन्नो को) समच्छेद करने के लिए प्रत्येक (भिन्न) के अंश और हर को अन्य (भिन्नो की) हरों में गुणा कर दो।”

अन्य ग्रन्थों में भी यह नियम मिलता है।

मिश्र भिन्न

यह बतलाया जा चुका है कि परिकर्म-सूचक चिह्नों के अभाव के कारण हिन्दू गणितज्ञों ने भिन्नो को ४ जातियों में विभक्त किया है। वे जातियाँ निम्नलिखित हैं

(१) भागजाति^२, अर्थात् निम्न स्वरूप की भिन्ने $\left(\frac{अ}{व} \pm \frac{स}{द} \pm \frac{च}{छ} \pm \dots \right)$

जिसको लिखने की हिन्दू रीति यह है

अ	स	च	अथवा	अ	म	च
व	द	छ		व	द	छ

यहाँ विन्दु (·) ऋणसूचक चिह्न है।

(२) प्रभाग-जाति^३, अर्थात् निम्न स्वरूप की भिन्ने

$\frac{अ}{व}$ का $\frac{स}{द}$ का $\frac{च}{छ}$ का)

जिसे लिखने की हिन्दू रीति यह है

अ	स	च
व	द	छ

^१ त्रिशतिका, पृ० १०। के महोदय का अनुवाद अशुद्ध है।

^२ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० १७५, त्रिशतिका, पृ० १०, गणित-सार-संग्रह, पृ० ३३ (श्लोक ५५, ५६), महासिद्धान्त पृ० १४६, लीलावती, पृ० ६।

^३ त्रिशतिका, पृ० १०, गणित-सार-संग्रह, पृ० ३६ (श्लोक ६६), महामिद्धान्त, पृ० १४६, लीलावती, पृ० ६।

(३) भागानुबन्धजाति^१, अर्थात् निम्न स्वरूपों की भिन्ने^२

$$(१) \text{ अ} + \frac{\text{व}}{\text{म}}$$

$$(२) \frac{\text{प}}{\text{फ}} + \frac{\text{प}}{\text{फ}} \text{का} \frac{\text{द}}{\text{म}} + \left(\frac{\text{प}}{\text{फ}} + \frac{\text{प}}{\text{फ}} \text{का} \frac{\text{द}}{\text{म}} \right) \text{का} \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

जिन्हें लिखने की हिन्दू रीति यह है

(अ)

अ
व
म

(ब)

प
फ
द
म
त
थ

(४) भागापवाह-जाति^३, अर्थात् निम्न स्वरूपों की भिन्ने^४

$$(अ) \left(\text{अ} - \frac{\text{व}}{\text{म}} \right)$$

$$(ब) \frac{\text{प}}{\text{फ}} - \frac{\text{प}}{\text{फ}} \text{का} \frac{\text{द}}{\text{म}} - \left(\frac{\text{प}}{\text{फ}} - \frac{\text{प}}{\text{फ}} \text{का} \frac{\text{द}}{\text{म}} \right) \text{का} \frac{\text{त}}{\text{थ}}$$

जिन्हें लिखने की हिन्दू रीति यह है —

(अ)

अ
व
म

(ब)

प
फ
द
म
त
थ

^१ प्रियातिका पृ० १०, गणित-सार-संग्रह पृ० ८१ (श्लोक ११३); महासिद्धान्त पृ० १४८, लीलावती पृ० ७।

^२ इन स्वरूपों को प्रथम रूप-भागानुबन्ध और अन्तर्भागानुबन्ध मन्नाएँ दी गयी हैं।

^३ ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त पृ० १७६, गणित-सार-संग्रह पृ० ८३ (श्लोक १२६), महासिद्धान्त पृ० १४८, लीलावती पृ० ७।

^४ इन स्वरूपों को प्रथम रूप-भागापवाह और अन्तर्भागापवाह मन्नाएँ दी गयी हैं।

श्रीघर और महावीर तथा कुछ अन्य गणितज्ञों ने उपर्युक्त जातियों के अति-द्विकृत निम्नलिखित दो जातियाँ और दी हैं—

(५) भाग-भाग-जाति^१, अर्थात् निम्न स्वरूप की भिन्ने .

$$\left(अ - \frac{व}{स} \right) \text{ अथवा } \left(\frac{प}{फ} - \frac{र}{म} \right)$$

भाग के परिकर्म को प्रदर्शित करने का कोई चिह्न न होने के कारण, इन भिन्नो को भी भागानुबन्ध-जाति की भिन्नो की भाँति ही लिखते थे,

यथा

अ
व
स

अथवा

प
फ
र
म

भाग इत्यादि क्रियाओं का ज्ञान प्रश्न में विदित किया जाता था^२, उदाहरणतः, १ - $\frac{१}{२}$ को पङ्भागभाग^३ द्वारा सूचित करते थे, जिसका अर्थ है, 'भाग-भाग का छठवाँ भाग' अथवा " $\frac{१}{२}$ द्वारा विभाजित ।"^४

(६) भागमातृ-जाति^५, अर्थात् उपर्युक्त स्वरूपों के मिश्रण से उत्पन्न भिन्ने । महावीर ने लिखा है कि ऐसी भिन्ने २६ प्रकार की हो सकती हैं ।^६ श्रीघर ने इस जाति के अन्तर्गत निम्नलिखित उदाहरण दिया है^७

^१ त्रिशतिका, पृ० ११, गणित-सार-संग्रह पृ० ३६ (श्लोक ६६) ।

^२ केवल वक्षाला हस्तलिपि में भाग दी जानेवाली राशि के बाद भागसूचक 'भा' अक्षर लिख दिया गया है ।

^३ देखिए त्रिशतिका, पृ० ११ ।

^४ गणित-सार-संग्रह पृ० ४१ (श्लोक ११२) में $२ - \frac{३}{४}$ को सूचित करने के लिए 'त्रिपादभक्त द्विकम्' का प्रयोग किया गया है ।

^५ त्रिशतिका, पृ० १२, गणित-सार-संग्रह, पृ० ४५ (श्लोक १३८) ।

^६ महावीर ने भिन्न की केवल ५ प्रमुख जातियों की कल्पना की है, अतएव उनके अनुसार निम्न प्रकार की मिश्र भिन्नो की संख्या

${}^१स_१ + {}^१स_२ + {}^१स_३ + {}^१स_४ = २६$

है ।

^७ त्रिशतिका, पृ० १२ ।

‘आधा, चौथाई का चौथाई, त्रिभागभाग, अपने आवे में युक्त आधा, और अपने आवे में रहित तृतीयांश को जोड़ने पर क्या बन होगा?’

आधुनिक संकेत में इसे इस प्रकार लिखा जायगा

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} \text{ का } \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ का } \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ का } \frac{1}{2})$$

प्राचीन हिन्दू पद्धति के अनुसार यह इस प्रकार लिखा जाता था

१	१	१	१	१	१
०	४	४	१	२	३
			३	१	१
				२	२

हिन्दू संकेत का अवगुण स्पष्ट है, क्योंकि

१	१
४	४

 को $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ और

१
१
३

 को $1\frac{1}{2}$ भी पढ़ सकते हैं। अतएव संकेत का यथार्थ अर्थ प्रश्न के मदर्थ में ही जाना जा सकता है।

पहली दो जातियों की भिन्नो को सरल करने के नियम वही हैं जो भिन्नो को जोड़ने, घटाने और गुणा करने के होते हैं। तीसरी और चौथी जातियों को सरल करने के नियम ब्रह्मगुप्त ने एक साथ दिया है

“(नीचे के) छेद में (ऊपरवाले) छेद को गुणा करें, तथा अपने अंश में युक्त अथवा हीन (नीचेवाले) छेद में ऊपरवाले अंश को गुणा करें।”

श्रीधर ने भागानुबन्ध जाति की भिन्ना का सरल करने के लिए निम्न नियम दिया है

‘तात्पर्य स्पष्ट भिन्नान् पृ० १७६। अ ± $\frac{b}{a}$ के सदृश भिन्नो को सरल करने की विधि अन्यत्र (पृ० १७३) दी गई है।

भित्तिता पृ० १०। नियम (१) अ $\frac{b}{a}$ के सदृश भिन्नो के लिए है तथा नियम (२) निम्न प्रकार की भिन्नो के लिए है

$$\frac{a}{c} \pm \frac{a}{c} \text{ का } \frac{b}{d} \quad \frac{a}{c} \pm \frac{a}{c} \text{ का } \frac{b}{d} \quad \frac{a}{c} \pm \frac{a}{c} \text{ का } \frac{b}{d}$$

(१) “भागानुबन्ध-जाति में पूर्णांक तथा छेद के गुणनफल में अश को जोड़ना चाहिए।”

(२) “ऊपर के छेद को नीचे के छेद से गुणा करो, और ऊपर के अश को, अपने अश से युत (नीचे के) छेद से गुणा करो।”

अन्य लेखको ने भी इसी प्रकार के नियम दिये हैं।

निम्नलिखित उदाहरण^१ में सरल करने की क्रिया का स्पष्टीकरण हो जायगा।

उदाहरण। $३\frac{१}{४} + ३\frac{१}{४}$ का $\frac{१}{४} + (३\frac{१}{४} + ३\frac{१}{४})$ का $\frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४}$ का $\frac{१}{४}$
 $+ (\frac{१}{४} + \frac{१}{४})$ का $\frac{१}{४}$

इसको निम्न प्रकार से लिखते थे—

३	
१	१
२	२
१	१
४	३
१	१
६	४

सबसे ऊपर के कोष्ठ में नियम (१) का प्रयोग करने पर, तथा नीचे के कोष्ठों में, अशों में हरो को जोड़ने पर, निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

७	१
२	२
८	४
४	३
७	५
६	४

अब नियमानुसार गुणन की क्रिया करने पर, अर्थात् सबसे ऊपर के कोष्ठ के हर को नीचे के मन हरो में, तथा अश को नीचे के अशों में गुणा करने पर निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$७ \times \frac{५}{४} \times \frac{७}{६} = \frac{३४५}{४८} \text{ और } \frac{१}{४} \times \frac{५}{४} \times \frac{५}{४} = \frac{३०}{४८}$$

अर्थात्

२४५	००
४८	०४

समच्छेद करने पर निम्नलिखित मिलता है

२४५	४०
४८	४८

योग करने पर $\frac{३८५}{४८}$ अर्थात् $७\frac{१}{६}$ मिलता है, और यही इष्टफल है।

भागापवाह का नियम पाटीगणित के सब ग्रन्थों में मिलता है। यह भागा-
नुबन्ध के नियम के समान ही है, अन्तर केवल इतना है कि इसमें जोड़ने के
स्थान पर घटाना पड़ता है।

निरुद्ध (अर्थात् लघुतम समापवर्त्य)

महावीर^१ पहले हिन्दू गणितज्ञ थे जिन्होंने क्रिया के लाघवार्थ निरुद्ध की कल्पना
की। उन्होंने निरुद्ध की निम्न परिभाषा दी है —

“छेदो के महत्तम समापवर्तक और (उसमें भाग देने पर प्राप्त) लब्धियों
का गुणनफल निरुद्ध कहलाता है।”

भिन्नो का समच्छेद करने के लिए उनका नियम इस प्रकार है —

‘निरुद्ध को हर में भाग देकर जो लब्धि प्राप्त हो उसमें हर और अंश
दोनों को गुणा करो। (ऐसा करने में सब भिन्नो का) एक हर हो जायगा।”

भास्कर द्वितीय^२ ने निरुद्ध की चर्चा नहीं की है परन्तु यह रहा है कि क्रिया
का लाघव किया जा सकता है। उनका कथन है

“वृद्धिमान् (गणक) को चाहिए कि (प्रत्येक भिन्न के) हर और अंश को
दूसरे (भिन्न) के अपवर्तित हर में गुणा करे।”

परिक्र्माष्टक

भिन्नो के परिवर्तन भारतवर्ष में बहुत प्राचीन काल में ज्ञात थे, उनका सम्यक्
करने की वही नीति ही जो आजकल प्रचलित है। यद्यपि गणित प्रथम में सम्यक्

^१ गणित सार-सागर पृ० ३३ (श्लोक ५६)।

^२ गणित-सार-सागर पृ० ३३ (श्लोक ५६)।

^३ नीलवल्ली पृ० ६।

परिकर्मों का उल्लेख नहीं किया है, तो भी यह दिखाने के प्रमाण है कि किमी भिन्न से भाग करने में उसे उलट देने का नियम वे जानते थे। भिन्नो के मत्र परिकर्म वक्षाली हस्तलिपि में मिलते हैं।

सकलित और व्यवकलित

इन परिकर्मों को करने के पहले भिन्नो का समच्छेद करते थे। श्रीधर का कथन है ^१

“भिन्नो का समच्छेद करके उनके अंशो को जोड़ लो। पूर्णांक का हर एक होता है।”

ब्रह्मगुप्त और महावीर ने इस नियम को भाग-जाति के अन्तर्गत दिया है। महावीर ने सकलित के अन्तर्गत चयश्रेढी (अर्थात् समान्तर श्रेढी) और गुणश्रेढी के योग करने के नियम दिये हैं, और इस बात में वे अन्य लेखकों में भिन्न हैं।^२ बाद के लेखकों ने श्रीधर का अनुकरण किया है।

गुणन

ब्रह्मगुप्त कहते हैं ^३

“अंशों के गुणनफल को हरों के गुणनफल से भाग देना ही दो अथवा अधिक भिन्नो का गुणन है।”

अन्य लेखकों के नियम भी ब्रह्मगुप्त के नियम के अनुरूप हैं। परन्तु महावीर ने क्रिया-लाग्व की दृष्टि से वज्रापवर्तन विधि का भी उल्लेख किया है ^४

“भिन्नो का गुणन करने में, पहले यदि संभव हो तो वज्रापवर्तन^५ कर लेने के बाद, अंशों को अंशों से और हरों को हरों से गुणा करना चाहिए।”

^१ त्रिशतिका, पृ० ७।

^२ देखिए गणित-मार मग्नह, पृ० २८ (श्लोक २२) आदि।

^३ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० १७३।

^४ गणित-मार-मग्नह, पृ० २४५ (श्लोक २)।

^५ वज्रापवर्तन-विधि के अनुसार

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32} = \frac{3}{8} = 1$$

भाग

आर्यभटीय में यद्यपि प्रारम्भिक परिकर्मों की चर्चा नहीं है तो भी त्रैराशिक के नियम के अन्तर्गत भिन्न के भाग करने की विधि का संकेत है। त्रैराशिक में इच्छा-फल के लिए निम्नलिखित सूत्र है

$$\text{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा}}{\text{प्रमाण}}$$

जब ये राशियाँ भिन्नात्मक होती हैं तब हमें इस प्रकार का इच्छाफल मिलता है

$$\frac{\frac{\text{अ}}{\text{व}} \times \frac{\text{म}}{\text{द}}}{\frac{\text{क}}{\text{ख}}}$$

जिसका सरल करने के लिए आर्यभट ने निम्न नियम दिया है

“गुणकार और भागहार (के अंशों) को एक दूसरे के हरों में गुणा करना चाहिए।”

जैसा आगे चलकर बतलाया जायगा, उपर्युक्त राशियों को निम्न प्रकार में लिखते हैं

अ	क
व	ख
म	
द	

हरों का पक्ष परिवर्तन करने पर हमें मिलता है

अ	व
ख	व
म	द

गुणन करने पर, $\frac{\text{अ म न}}{\text{व व द}}$ प्राप्त होता है।

¹ आर्यभटीय पृ. ४३। परमेश्वर की टीका के सम्बन्ध होने के कारण पहले घेरेद्वी को कुछ कम सा हो गया है। देखो ब्रह्म (पृ. १०) और तेनगुण (पृ. २५)।

आर्यभटीय का उपर्युक्त नियम टीकाकार सूर्यदेव और भास्कर प्रथम द्वारा दी गई व्याख्या के आधार पर है। सूर्यदेव का कथन है

“यहाँ पर ‘गुणकार’ का अर्थ है गुणक और गुण्य, अर्थात् फल और इच्छा-राशियों को आपस में गुणा करना चाहिए। ‘भागहार’ का अर्थ है प्रमाण-राशि। फल और इच्छा के हरो को प्रमाण के साथ लिया गया है। और प्रमाण के हर को फल और इच्छा के साथ लिया गया है। इनको गुणा करने पर, अर्थात् फल और इच्छा (के अंशों) तथा इस हर को, और उसे (अर्थात् उस गुणनफल को) प्रमाण के साथ स्थित अंशों (के गुणनफल) में भाग देने पर, जो आता है वही इष्ट भिन्नो का भागफल होता है।”

ब्रह्मगुप्त^१ ने भाग करने की रीति को इस प्रकार दिया है

“भागहार के अंश और हर का परस्पर स्थान परिवर्तन करने के बाद, भाज्य के अंश को (भागहार के नये) अंश से और भाज्य के हर को (भागहार के नये) हर से गुणा करो, इस प्रकार दो सर्वणिता भिन्नो का भाग किया जाता है।”

श्रीधर^२ ने गुणन की विधि के साथ-साथ निम्न नियम भी जोड़ दिया है।

“भागहार के अंश और हरो के परस्पर स्थान-परिवर्तन करने के बाद पूर्व-वत् क्रिया, अर्थात् गुणन, करना चाहिए।

महावीर^३ ने उसी नियम को इस प्रकार व्यक्त किया है

“भागहार^४ के अंश को उसका हर (और हर को अंश) मानकर, वही क्रिया करनी चाहिए जो गुणन के लिए कही गई है।”

“अथवा”, भागहार और भाज्य (के अंशों) को एक दूसरे के हरो में गुणा कर देने पर जब (दोनों) गुणनफल छेद रहित हो जायें, तब वह क्रिया करनी चाहिए जो पूर्ण मख्याओं का भाग करने में कही गई है।”

^१ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त पृ० १७३।

^२ त्रिशतिका पृ० ८।

^३ गणित-सार-संग्रह पृ० २६ (श्लोक ८)।

^४ महावीर ने भागहार के लिए ‘प्रमाण राशि’ शब्द का प्रयोग किया है, जिससे इस नियम का त्रैराशिक से सम्बन्ध प्रदर्शित होता है।

^५ इस नियम का कथन आर्यभट्ट के नियम के सदृश है।

‘मल में ‘सकल’ शब्द का प्रयोग किया गया है।

वर्ग और वर्गमूल

ब्रह्मगुप्त^१ कहते हैं

“सर्वणित भिन्न के अंश के वर्ग को हर के वर्ग से भाग देने पर (भिन्न का) वर्ग हो जाता है।”

“सर्वणित भिन्न के अंश के मूल को हर के मूल से भाग देने पर (भिन्न का) वर्गमूल हो जाता है।”

अन्य ग्रन्थकारों ने भी यही नियम दिये हैं।

घन और घनमूल

श्रीधर^२ ने निम्नलिखित नियम दिया है

“अंश के घन को हर के घन से भाग देने पर (भिन्न का) घन मिलता है, और अंश के घनमूल को हर के घनमूल से भाग देने पर (भिन्न का) घनमूल मिलता है।”

अन्य लेखकों ने भी यही नियम दिये हैं।

एकांशक भिन्न^३

महावीर ने किसी दी हुई भिन्न को एक से अधिक एकांशक भिन्नो के जोड़ के रूप में परिवर्तित करने के बहुत से नियम दिये हैं। ये नियम नारायण की ‘गणित कौमुदी’ को छोड़कर अन्य किसी ग्रन्थ में नहीं मिलते, संभवतः इसलिए कि वे सम्प्रवर्तमान अथवा अनावश्यक समझे गये थे।

(१) १ को ‘न’ एकांशक-भिन्नो के जोड़ के रूप में व्यक्त करना।

इसके लिये यह नियम है ^४

“बहुत सी एकांशक भिन्नो का योगफल १ होने पर उन भिन्नो को १ से जाग्रभ हाकर क्रमशः ३ के अनुपात में बढ़ने वाली संख्याएँ होगी, जिनमें प्रथम और अन्तिम हरे क्रमशः २ और ३ ने भी गुणित होंगी।”

^१ ब्रह्म-रफ्ट-सिद्धान्त, पृ० १७४।

विगतिता, पृ० ६।

^३ एकांशक भिन्न वे हैं जिनके अंश में १ होता है। संस्कृत में इसके लिए पाणिनिभाषिण शब्द नहीं है। महावीर ने ऐसी भिन्नो के लिए ‘एकांशक’ शब्द का प्रयोग किया है।

^४ गणित-नार-नार पृ० ३६ (श्लोक ८५)।

वीजत नियम यह है

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{3^{3n-2}}$$

(२) १ को एकाशक भिन्नो की विषम सख्या के जोड़ के रूप में व्यक्त करना । इसके लिए यह नियम बताया गया है '

"जब एकाशक भिन्नो का योगफल १ होता है, तब उन (भिन्नो) की हरें २ में आरम्भ होकर एक एक करके बढ़नेवाली मख्याये होती है, जो अपने आगे वाली सख्या तथा ३ में गुणित होती है ।"

अर्थात्

$$1 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2n \cdot \frac{1}{2}}$$

(३) किसी दी हुई एकाशक भिन्न को अनेक भिन्नो के योग के रूप में व्यजित करना, जबकि प्रत्येक के अंश दिये हुए हैं ।

इसके लिए निम्नलिखित नियम है '

"(कई भिन्नो का) योग एकाशक भिन्न होने पर, उस एकाशक भिन्न का हर पहली भिन्न का (आंशिक) हर होता है, उस (आंशिक) हर में अपने अंश को जोड़ देने पर जो मिलता है वह दूसरी भिन्न का (आंशिक) हर होता है (इत्यादि) । प्रत्येक (आंशिक हर) को अगली (आंशिक) हर में तथा अन्तिम (आंशिक हर) को अपने अंश से गुणा करने पर (उन भिन्नो के वास्तविक हरो की प्राप्ति होती है) ।"

अर्थात्

$$\frac{1}{n} = \frac{a_1}{n(n+a_1)} + \frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)} + \dots + \frac{a_{r-1}}{(n+a_1+\dots+a_{r-2})(n+a_1+\dots+a_{r-1})} + \frac{a_r}{a_r(n+a_1+\dots+a_{r-1})}$$

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ३६ (श्लोक ७७) ।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ३६ (श्लोक ७८) ।

यदि हम $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$ ले, तो सब भिन्ने एकात्मक हो जायेंगी। परन्तु यदि a_1, a_2, \dots इत्यादि १ से भिन्न ली जायें तो आवश्यक नहीं है कि सब भिन्ने अपने लघुस्पर्श में हों।

(४) किसी दी हुई भिन्न को एकात्मक भिन्नो के योग के रूप में व्यक्त करना।

इसके लिए यह नियम है :

“(दी हुई भिन्न के) हर में किसी ऐसी (कल्पित) संख्या को जोड़ दो कि योग-फल को अपने अंश में भाग देने पर शेष न बचे। (इस प्रकार) भाग देने से प्राप्त लघुस्पर्श पहले भिन्न की हर है, और इस हर तथा दी हुई (भिन्न की) हर द्वारा भाग की हुई कल्पित संख्या, शेष है। इस शेष पर से वही क्रिया करने पर अन्य भिन्नो की हरे प्राप्त होगी।”

मान लो कि दी हुई भिन्न $\frac{k}{g}$ है। यदि ‘ h ’ ऐसी संख्या हो कि $\frac{kh + h}{k}$ पूर्ण संख्या ‘ r ’ के तुल्य है, तो उपयुक्त नियम के अनुसार

$$\frac{k}{g} = \frac{1}{r} + \frac{h}{rg},$$

जिनमें $\frac{1}{r}$ पहली भिन्न एक एकात्मक भिन्न है, अन्य एकात्मक भिन्नो का ज्ञान करने के लिए दूसरी भिन्न पर वही क्रिया करनी चाहिए।

उपयुक्त नियम के अनुसार प्राप्त की गयी भिन्न कल्पित संख्याओं पर निर्भर रहूँगी।

(५) किसी दी हुई एकात्मक भिन्न का दो अन्य एकात्मक भिन्नो के योग के रूप में व्यक्त करना।

इसके लिए निम्नलिखित दो नियम दिये गये हैं :

वीजत नियम यह है

$$१ = \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{३ \times २} + \dots + \frac{१}{३^{n-२}} + \frac{१}{२ \times ३^{n-२}}$$

(२) १ को एकाशक भिन्नो की विषम सख्या के जोड़ के रूप में व्यक्त करना । इसके लिए यह नियम बताया गया है ^१

“जब एकाशक भिन्नो का योगफल १ होता है, तब उन (भिन्नो) की हरे २ में आरम्भ होकर एक एक करके बढ़नेवाली मध्याये होती है, जो अपने आगे वाली सख्या तथा ३ में गुणित होती है ।”

अर्थात्

$$१ = \frac{१}{२ \times ३ \frac{१}{२}} + \frac{१}{३ \times ४ \frac{१}{२}} + \frac{१}{४ \times ५ \frac{१}{२}} + \dots + \frac{१}{(२n-१) २n \frac{१}{२}} + \frac{१}{२n \frac{१}{२}}$$

(३) किसी दी हुई एकाशक भिन्न को अनेक भिन्नो के योग के रूप में व्यजित करना, जबकि प्रत्येक के अंश दिये हुए हैं ।

इसके लिए निम्नलिखित नियम है ^२

“(कई भिन्नो का) योग एकाशक भिन्न होने पर, उस एकाशक भिन्न का हर पहली भिन्न का (आशिक) हर होता है, उस (आशिक) हर में अपने अंश को जोड़ देने पर जो मिलता है वह दूसरी भिन्न का (आशिक) हर होता है (इत्यादि) । प्रत्येक (आशिक हर) को अगली (आशिक) हर में तथा अन्तिम (आशिक हर) को अपने अंश से गुणा करने पर (उन भिन्नो के वास्तविक हरो की प्राप्ति होती है) ।”

अर्थात्

$$\begin{aligned} \frac{१}{n} = & \frac{अ_१}{n(n+अ_१)} + \frac{अ_२}{(n+अ_१)(n+अ_१+अ_२)} + \dots \\ & + \frac{अ_{r-१}}{(n+अ_१+अ_२+\dots+अ_{r-२})(n+अ_१+\dots+अ_{r-१})} \\ & + \frac{अ_r}{अ_r(n+अ_१+\dots+अ_{r-१})} \end{aligned}$$

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ३६ (श्लोक ७७) ।

^२ गणित-मार-संग्रह, पृ० ३६ (श्लोक ७८) ।

यदि हम $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$ ले, तो सब भिन्न एकाशक हो जायेंगी। परन्तु यदि a_1, a_2, \dots इत्यादि १ से भिन्न ली जायें तो आवश्यक नहीं है कि सब भिन्न अपने लघुत्प में हो।

(४) किसी दी हुई भिन्न को एकाशक भिन्नो के योग के रूप में व्यजित करना।

इसके लिए यह नियम है ^१

“(दी हुई भिन्न के) हर में किसी ऐसी (कल्पित) सख्या को जोड़ दो कि योग-फल को अपने अंश में भाग देने पर शेष न बचे। (इस प्रकार) भाग देने से प्राप्त लब्धि पहले भिन्न की हर है, और इस हर तथा दी हुई (भिन्न की) हर द्वारा भाग की हुई कल्पित सख्या, शेष है। इस शेष पर से वही क्रिया करने पर अन्य भिन्नो की हरे प्राप्त होगी।”

मान लो कि दी हुई भिन्न $\frac{क}{ख}$ है। यदि ‘इ’ ऐसी सख्या हो कि $\frac{ख+इ}{क}$ पूर्ण सख्या ‘र’ के तुल्य है, तो उपर्युक्त नियम के अनुसार

$$\frac{क}{ख} = \frac{१}{र} + \frac{इ}{र ख},$$

जिनमें से पहली भिन्न इष्ट एकाशक भिन्न है, अन्य एकाशक भिन्नो को ज्ञात करने के लिए दूसरी भिन्न पर वही क्रिया करनी चाहिए।

उपर्युक्त नियम के अनुसार प्राप्त की गयी भिन्नो कल्पित सख्याओ पर निर्भर रहेगी।

(५) किसी दी हुई एकाशक भिन्न को दो अन्य एकाशक भिन्नो के योग के रूप में व्यजित करना।

इसके लिए निम्नलिखित दो नियम दिये गये हैं ^२

“(१) दी हुई भिन्न की हर को उपयुक्त^३ कल्पित सख्या से गुणा करने पर पहली (एकाशक) भिन्न का हर मिलता है, और उसे एकोन कल्पित सख्या से भाग करने पर दूसरी का (हर मिलता है)। अथवा (२) दी हुई भिन्न की

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ३७ (श्लोक ८०)।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ३७ (श्लोक ८५)।

^३ कल्पित सख्या ऐसी होनी चाहिए कि एकोन कल्पित सख्या से दी हुई भिन्न के हर का निशेष भाग हो जाय।

हर के (नि शेष) भाजक तथा प्राप्त लब्धि को (अलग अलग) उनके योग में गुणा करने पर दोनों (एकाशक भिन्नो की) हरे प्राप्त होती है।”

(६) किसी दी हुई भिन्न को दो अन्य भिन्नो के योग के रूप में व्यजित करना, जबकि उन दो भिन्नो के अंश दिये हुये हैं।

इसके लिए यह नियम है ^१

“(पहली भिन्न के) अंश को किसी उपयुक्त कल्पित सख्या में गुणा करके उस गुणनफल में दूसरी भिन्न के अंश को जोड़ दो, और जोड़ की भिन्न के अंश से नि शेष भाग कर दो। लब्धि को कल्पित सख्या में भाग करो और (लब्धि-स्वरूप) जो आवे उसे जोड़ की भिन्न की हर में गुणा करेंगे इस प्रकार जो मिलेगा वह (पहली भिन्न का) हर है। उभे कल्पित सख्या में गुणा करने पर जो मिलेगा वह दूसरी भिन्न का हर है।”^२

अर्थात्

$$\frac{म}{न} = \frac{\frac{क}{क र + ख} \times \frac{न}{र}}{\frac{म}{म}} + \frac{\frac{ख}{क र + ख} \times \frac{न}{र} \times र}{\frac{म}{म}}$$

इसका एक विशिष्ट रूप यह है

$$\frac{म}{न} = \frac{\frac{क}{क न + ख}}{\frac{म}{म}} + \frac{\frac{ख}{क न + ख} \times न}{\frac{म}{म}}$$

यदि (कन+ख) को म से भाग देने पर शेष न बचे।

(७) किसी दी हुई भिन्न को भिन्नो की समसख्या के योग के रूप में व्यजित करना, जबकि उन भिन्नो के अंश दिये हुये हैं।

इसके लिए यह नियम है ^३

“दी हुई भिन्न को (पहले) उतनी एकाशक भिन्नो के योग के रूप में रखो जितने कि डाट भिन्नो के जोड़े हैं। फिर उन एकाशक भिन्नो से दी हुई भिन्न

^१ गणित-सार-मग्नह, पृ० ३८ (श्लोक ८७)।

^२ कल्पित सख्या ऐसी होनी चाहिए कि दोनों भाग नि शेष हो।

^३ गणित-सार-मग्नह, पृ० ३८ (श्लोक ८६)।

को दो भिन्नो के योग में रूपान्तरित करने की विधि में इष्ट भिन्नो के हरो का साधन करो।”

१२ त्रैराशिक

परिभाषा

त्रैराशिक शब्द ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों से देखने में आता है। इसका प्रयोग वक्षाली हस्तलिपि,^१ आर्यभटीय, तथा गणित के अन्य सभी ग्रन्थों में मिलता है। त्रैराशिक शब्द का अर्थ है ‘तीन राशियाँ’ अर्थात् ‘तीन राशियों से सम्बन्ध रखनेवाला नियम’। इस शब्द की उत्पत्ति के सम्बन्ध में भास्कर प्रथम^२ ने कहा है “क्योकि इसमें (न्यास और करण के लिए) तीन राशियों की आवश्यकता पड़ती है, अतएव यह नियम त्रैराशिक (‘तीन राशियों का नियम’) कहलाता है।”

त्रैराशिक के प्रश्न का स्वरूप निम्न प्रकार का होता है

यदि ‘प्र’ में ‘फ’ मिलता है, तो ‘इ’ में क्या मिलेगा ?

यहाँ पर तीन राशियाँ हैं ‘प्र’, ‘फ’ और ‘इ’। हिन्दू गणितज्ञ ‘प्र’ को प्रमाण, ‘फ’ को फल, और ‘इ’ को इच्छा कहते हैं। ये नाम हिन्दू गणित के सब ग्रन्थों में मिलते हैं। कभी कभी इन्हें ‘प्रथम’, ‘द्वितीय’ और ‘तृतीय’ (राशि) भी कहा गया है। आर्यभट्ट द्वितीय की मज्ञायें कुछ भिन्न हैं, क्योंकि उन्होंने ‘प्र’, ‘फ’ और ‘इ’ को क्रमानुसार ‘मान’, ‘विनिमय’ और ‘इच्छा’ कहा है। सभी गणितज्ञों ने लिखा है कि प्रथम और तृतीय राशियाँ सदृश, अर्थात् एक जाति की, होती हैं।”

करण

आर्यभट्ट प्रथम ने त्रैराशिक के प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित नियम दिया है

“त्रैराशिक (के प्रश्नों) में फलराशि को इच्छाराशि से गुणा करना चाहिए

^१स्थानाग सूत्र (ल० ३०० ई० पू०) में विषयो की गणना करने में राशि शब्द का प्रयोग आया है (देखिए सूत्र ७४७)। कदाचित् वहाँ पर इस शब्द से त्रैराशिक, पंचराशिक, सप्तराशिक इत्यादि से तात्पर्य है।

^२ अपने आर्यभटीय-भाष्य में।

और प्राप्त गुणनफल को प्रमाणराशि से भाग देना चाहिए। इस प्रकार भाग करने से जो लब्धि प्राप्त होती है वही इच्छाफल है।”^१

“गुणक और भागहार के (अगो और) हरो को एक दूसरे में गुणा करना चाहिए।”

ब्रह्मगुप्त का नियम इस प्रकार है

“त्रैराशिक में प्रमाण, फल और इच्छा (नाम की तीन) राशियाँ होती हैं जिनमें से पहली और अन्तिम राशियाँ एक जाति की होती हैं। इच्छा को फल में गुणा करने पर और उस गुणनफल को प्रमाण से भाग देने पर (इच्छा) फल मिलता है।”^२

श्रीधर कहते हैं

“(त्रैराशिक की) तीन राशियों में से प्रमाण और इच्छा, जो एक जाति की हैं, आदि और अन्त की हैं, फल राशि, जो अन्य जाति की है, मध्य की है। मध्य और अन्तिम के गुणनफल को आदि से भाग देना चाहिए।”^३

महावीर लिखते हैं

“त्रैराशिक में जब इच्छा और प्रमाण एक जाति के होते हैं, तब फल और इच्छा के गुणनफल को प्रमाण से भाग करने पर इच्छाफल मिलता है।”^४

आर्यभट्ट द्वितीय की पारिभाषिक शब्दावली में कुछ अन्तर है। उनका कथन है

“पहली राशि को ‘मान’ कहते हैं, मध्य राशि को ‘विनिमय’ कहते हैं, और अन्तिम राशि को ‘इच्छा’ कहते हैं। पहली और अन्तिम राशियाँ एक जाति की होती हैं। ‘मध्य’ राशि को ‘अन्तिम’ राशि से गुणा करके गुणनफल को ‘पहली’ राशि से भाग देने पर (इच्छा) फल मिलता है।”^५

भास्कर द्वितीय, नारायण और अन्य लेखकों द्वारा दिये गये नियम ब्रह्मगुप्त और श्रीपति के नियमों के अनुरूप हैं।

^१ आर्यभटीय, गणितपाद, आर्या २७ (पूर्वार्ध)। उदाहरण १ को देखिए, जिसमें हरो का आपस में परिवर्तन किया गया है। पृ० १८५ आदि भी देखिए।

^२ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० १७८।

^३ त्रिशतिका, पृ० १५।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ५८ (२)।

^५ महा-सिद्धान्त, पृ० १४६।

नीचे हम श्रीधर की त्रिगुणिका से दो उदाहरण उद्धृत कर रहे हैं जिनसे त्रैराशिक की भारतीय करणविधि स्पष्ट हो जायगी

उदाहरण १. यदि एक पल और एक कर्ष चन्दन की लकड़ी १० पण में प्राप्त होती है, तो नौ पल और एक कर्ष (चन्दन की लकड़ी) कितने में प्राप्त होगी ?^१

यहाँ पर १ पल और १ कर्ष (= १ $\frac{३}{४}$ पल) प्रमाण है, १० $\frac{३}{४}$ पण फल है, और ९ पल और एक कर्ष (= ९ $\frac{३}{४}$ पल) इच्छा है। इन राशियों को निम्न प्रकार से लिखते हैं

१	१०	९
१	१	१
४	२	४

भिन्नो का सवर्णन करने पर, हमें यह मिलता है

५	२१	३७
४	२	४

द्वितीय और तृतीय राशियों को गुणा करने पर, और प्रथम राशि से भाग देने पर, हमें यह मिलता है

२१	५
२	४
३७	
४	

$$= \frac{२१ \times ३७}{२ \times ४}$$

$$= \frac{५}{४}$$

हरो का कोष्ठ परिवर्तन करने पर हमें यह मिलता है:

२१	५
४	२
३७	४

$$= \frac{२१ \times ४ \times ३७}{५ \times २ \times ४} \text{ पण}$$

= ४ पुराण, १३ पण, २ काकिणी, और १६ वराटक।

वास्तविक गणना में बीच का पद

$$\frac{२१ \times ३७}{२ \times ४}$$

$$= \frac{५}{४}$$

^१ त्रिगुणिका, पृ० १५।

नहीं लिखा जाता था। गुणको के हरो को भाजक की ओर और भाजक के हर को गुणको की ओर स्थानान्तरित कर देते थे, और इस प्रकार तुरन्त ही

$$\frac{२१ \times ४ \times ३७}{५ \times २ \times ४}$$

मिल जाता था।

उदाहरण २. आठ आठ मुक्ताओं वाले हारो में छ छ मुक्ताओं वाले कितने हार बन सकते हैं ?^१

यहाँ पर पहले यह त्रैराशिक हल करते हैं यदि १ हार में ८ मुक्ता हैं तो २० हारों में कितनी मुक्ता होगी? अतएव इन राशियों को क्रम में इस प्रकार लिखते हैं

१	८	२०
---	---	----

त्रैराशिक का नियम लगाने पर, मुक्ताओं की संख्या १६० आती है।

अब त्रैराशिक यह है यदि ६ मुक्ताओं का एक हार है, तो १६० मुक्ताओं में उस प्रकार के कितने हार होंगे? अतएव इन राशियों को क्रमानुसार इस प्रकार लिखते हैं

६	१	१६०
---	---	-----

त्रैराशिक का नियम लगाने पर, हारों की निम्न संख्या आती है हार २६, हाराश

२६
३

व्यस्त त्रैराशिक

त्रैराशिक का नियम बतलाने के बाद हिन्दू लेखकों ने लिखा है कि जब अनुपात व्यस्त हो तब त्रैराशिक की क्रिया व्यस्त रीति से करनी चाहिए। इस प्रकार श्रीधर लिखते हैं

“त्रैराशिक व्यस्त होने पर मध्य-राशि को प्रथम राशि से गुणा करके अन्तिम राशि से भाग देना चाहिए।”^२

^१ त्रिशतिका, पृ० १७।

^२ त्रिशतिका, पृ० १८।

महावीर कहते हैं

“व्यस्त (त्रैराशिक) में विपरीत क्रिया करनी चाहिए।”^१

भास्कर द्वितीय लिखते हैं

“विलोम (त्रैराशिक) में व्यस्त क्रिया करनी चाहिए।”^२

उन्होंने यह भी लिखा है

“जब इच्छा की वृद्धि होने पर फल का ह्रास हो तथा इच्छा के ह्रास होने पर फल की वृद्धि हो, तब गणितकोविदों को समझना चाहिए कि त्रैराशिक व्यस्त है।”^३

“जीवित प्राणियों की उम्र से उनका मूल्य निद्वारण करने में, सुवर्ण के वर्ण से तौल निद्वारण करने में, तथा राशियों के भागीकरण में^४ व्यस्त त्रैराशिक होता है।”

त्रैराशिक के अन्तर्गत दिये हुये उदाहरण २ को व्यस्त त्रैराशिक के नियम से भी हल किया गया है, यथा

“न्यास

८	२०	६
---	----	---

 । फल— हार

२६
२
३

 ।”

यहाँ पर त्रैराशिक व्यस्त है, क्योंकि जब इच्छा राशि (अर्थात् हार की मुक्ताओं की सख्या) बढ़ती है, तब फल (अर्थात् हारों की सख्या) घटती है।

त्रैराशिक की प्रशंसा

त्रैराशिक की सरलता तथा साधारण प्रश्नों में उसके प्रयोग की व्यापकता के कारण हिन्दुओं ने इसकी अत्यधिक प्रशंसा की है। हिन्दुओं द्वारा बनाया हुआ त्रैराशिक का नियम इतना सीधा है कि अपढ व्यक्ति भी प्रश्नों को हल करने में निडर होकर इसका प्रयोग कर सकते हैं। बराहमिहिर ने लिखा है

“यदि सूर्य एक वर्ष में पृथ्वी की एक परिक्रमा करता है तो इष्ट दिनों में

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ५८ (श्लोक २)।

^२ लीलावती, पृ० १७।

^३ लीलावती, पृ० १७।

^४ ‘अनाज की राशियाँ’, जो छोटे परिमाण से नापी जा चुकी हैं, पुनः बड़े परिमाण से नापी जाती हैं, तब माप-सख्या घट जाती है।’ (सूर्यदास की टीका)

^५ लीलावती, पृ० १८।

कितनी परिक्रमाएँ करेगा ? इस प्रकार की सूर्य-सम्बन्धी गणना को क्या अज्ञ व्यक्ति खडिया से रेखाएँ खींचकर नहीं कर सकता ?”

भास्कर द्वितीय ने अपने ग्रंथों में अनेकों स्थलों पर त्रैराशिक के नियम की प्रशंसा की है। उन्होंने लिखा है

“जिस प्रकार यह जगत्, जन्म-मरण के क्लेशों को हरने वाले तथा निखिल जगत् की सृष्टि के एकमात्र कारण, भगवान् श्रीनारायण के ममस्त भुवन, भावन, पर्वत, नदी, सुर, नर और असुर इत्यादिक भेदों से व्याप्त है, उसी प्रकार यह सम्पूर्ण गणित त्रैराशिक से व्याप्त है।”

“वीजगणित में अथवा यहाँ पर (अकगणित में) गुणन और भाग की विधि से जो कुछ भी गणना की जाती है, उसे निर्मलबुद्धि वालों को त्रैराशिक ही समझना चाहिए। प्रज्ञा विद्वानों ने इसी के भिन्न भिन्न भेदों को सुगम करके तथा प्रकीर्ण-दिक नाम देकर जो कुछ रचना की है वह केवल हम लोगों के सदृश मन्दबुद्धि वालों की बुद्धि को बढ़ाने के हेतु है।”^१

अन्य स्थान पर भास्कर द्वितीय कहते हैं

“वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल के अतिरिक्त जो कुछ गणना की जाती है वह सब त्रैराशिक का भिन्न भिन्न रूप है, कोई दूसरी वस्तु नहीं।”^२

पश्चिम के देशों में त्रैराशिक

त्रैराशिक सम्बन्धी हिन्दू नियमों के इतिहास से विदित होता है कि पश्चिम के लोग गणित के क्षेत्र में भारतवर्ष के कितने ऋणी हैं। त्रैराशिक का नियम अरब तथा मध्यकालीन लेटिन लेखकों के ग्रंथों में मिलता है। इन ग्रंथों में भारतीय नाम ‘त्रैराशिक’ को ग्रहण किया गया है। यद्यपि राशियों के भारतीय नामों का परित्याग किया गया है, तो भी राशियों को एक पक्ति में लिखने तथा उन्हें इस प्रकार क्रमबद्ध करने की परिपाटी का कि प्रथम और अंतिम राशियाँ एक जाति की हो ग्रहण किया गया है। इस प्रकार डिग्गेस (१५७२ ई०) कहते हैं^३ कि “ अन्तिम सख्या को दूसरी से गुणा

^१ लीलावती, पृ० ७६।

^२ सिद्धान्त-शिरोमणि, गोलाध्याय, प्रश्नाध्याय, श्लोक ४।

^३ स्मिथ (पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ४८८) द्वारा उद्धृत।

करो और गुणनफल को पहली सख्या से भाग दो।” “सख्याओ को स्थापन करने मे इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि प्रथम और अंतिम सख्याएँ एक जाति की हो।” त्रैराशिक का नियम, जैसा पहले कहा जा चुका है, ईसवी सन् की प्रारम्भिक शताब्दियों मे बना था। अरब मे यह नियम सभवत आठवी शताब्दी मे पहुँचा और वहाँ से इसका पदार्पण यूरोप मे हुआ जहाँ पर इसकी अत्यधिक प्रशंसा हुई^१ और इसे ‘स्वर्ण नियम’ की उपाधि से विभूषित किया गया।

मिश्रानुपात

मिश्रानुपात को भारतीय गणित मे, प्रश्न मे प्रयुक्त राशियों की सख्या के अनुसार, पचराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक इत्यादि सज्ञाएँ दी गई हैं, जो कि कभी कभी ‘बहुराशिक’-सज्ञक सामान्य शीर्षक के अतर्गत वर्गीकृत किये गये हैं। आर्यभट्ट प्रथम ने यद्यपि केवल त्रैराशिक के नियम का ही कथन किया है, तो भी ऐसा प्रतीत होता है कि उपर्युक्त पारिभाषिक सज्ञाएँ और तत्संबंधी नियम उनके समय में सुविख्यात थे। भास्कर प्रथम ने अपने आर्यभटीय-भाष्य मे जोर देकर लिखा है कि त्रैराशिक और मिश्रानुपात का भेद वास्तविक होने की अपेक्षा बनावटी अधिक है। वे कहते हैं

“आचार्य आर्यभट्ट ने तो यहाँ पर केवल त्रैराशिक का वर्णन किया है, पचराशिक इत्यादि अनुपातविशेषों का ज्ञान कैसे किया जायगा ? (समाधान में) कहते हैं— आचार्य ने अनुपात के सिद्धान्त का उपदेश किया है, और अनुपात के सिद्धान्त की सहायता से पचराशिक इत्यादि सब सिद्ध हो जाते हैं। कैसे ? क्योंकि पचराशिक इत्यादि त्रैराशिकों के समूह हैं। पञ्चराशिक इत्यादि त्रैराशिकों के समूह किस प्रकार हैं ? (क्योंकि) पचराशिक में दो त्रैराशिक मिले हैं, सप्तराशिक मे तीन त्रैराशिक मिले हैं, नवराशिक में चार त्रैराशिक मिले हैं, इत्यादि। इसका स्पष्टीकरण उदाहरणों में किया जायगा।”^२

^१ अरबों ने भी इस नियम को बड़ा महत्त्व दिया था, जो कि अलबेरूनी द्वारा ‘फो राशिकात अल-हिन्द’ (‘हिन्दुओं के राशिक’) नाम के स्वतन्त्र ग्रंथ को लिखने से प्रकट होता है। इस ग्रंथ में हिन्दुओं के त्रैराशिक तथा बहुराशिक के नियमों का वर्णन है। अलबेरूनी कृत इडिया (भाग १, पृ० ३१३) को भी देखिए जिसमें व्यस्त त्रैराशिक का एक उदाहरण दिया गया है।

^२ देखिए गणितपाद, श्लोक २६-२७ (पूर्वार्ध) की व्याख्या।

पञ्चराशिक, सप्तराशिक, इत्यादि के सम्बन्ध में इसी प्रकार के कथन लीलावती के टीकाकारों, विशेषकर गणेशदैवज्ञ और सूर्यदास, ने भी किये हैं।^१

मिश्रानुपात के प्रश्नों में राशियों के दो समूह दिये रहते हैं। पहिला समूह जिसमें सब राशियाँ रहती हैं, प्रमाण पक्ष कहलाता है, दूसरा समूह जिसमें एक राशि अज्ञात होती है, इच्छा पक्ष कहलाता है।

विधि

मिश्रानुपात के प्रश्नों को हल करने के लिए ब्रह्मगुप्त ने निम्न नियम दिया है।

“त्रैराशिक में लेकर^२ एकादश राशिक तक में फलों को एक पक्ष में दूसरे पक्ष में ले जाने के बाद, अधिक राशियों वाले पक्ष के गुणनफल को कम राशियों वाले पक्ष के गुणनफल से भाग करने पर (इष्ट) फल की प्राप्ति होती है। दोनों पक्षों के सब भिन्नो के हरो का भी इसी प्रकार पक्षपरिवर्तन कर लेना चाहिए।”^३

श्रीधर कहते हैं

“फल को एक पक्ष में दूसरे पक्ष में ले जाओ और (तब सब भिन्नो के) हरो का पक्ष परिवर्तन करो। इसके बाद दोनों पक्षों की राशियों को (अलग अलग) गुणा करो, और अधिक राशियों वाले पक्ष के गुणनफल को दूसरे पक्ष की राशियों के गुणनफल से भाग दे दो। (प्राप्त लब्धि इष्ट फल है)।”^४

महावीर^५ और आर्यभट्ट द्वितीय^६ के नियम श्रीधर के नियम के अनुरूप हैं। भास्कर द्वितीय का नियम इस प्रकार है

^१ यह बात कोलद्युक्त ने लिखी है। देखिए पूर्वोक्त ग्रन्थ, पृ० ३५, टिप्पणी।

^२ यह ध्यान देने योग्य है कि, जैसा कहा जा चुका है, त्रैराशिक का नियम बहुराशिक के नियम का ही एक विशिष्ट स्वरूप है। केवल ब्रह्मगुप्त ही एक ऐसे हिन्दू लेखक हैं जिन्होंने त्रैराशिक को भी उपर्युक्त नियम में सम्मिलित कर लिया है। कुछ अरबी लेखकों ने भी इस बात में उनका अनुकरण किया है और त्रैराशिक की राशियों को एक पक्ष में न लिखकर बहुराशिक के नियम के अनुसार उन्हें कोष्ठों में क्रमबद्ध किया है।

^३ ब्राह्म-स्फुट-मिद्धान्त, पृ० १७८।

^४ त्रिशतिका, पृ० १६।

गणित-सार-संग्रह, पृ० ६२ (श्लोक ३२)।

^५ महामिद्धान्त, पृ० १५०, नियम २६ और २७ (कुछ अन्तर के साथ पुनरावृत्त)।

“पञ्चराशिक, मष्टराशिक, और नवराशिक इत्यादि में फल और (उमके बाद) हरो (छिद्) को एक पक्ष में दूसरे में ले जाकर, अधिक राशियों वाले पक्ष के गुणनफल को कम राशियों वाले पक्ष के गुणनफल से भाग करने पर (इष्ट) फल की प्राप्ति होती है।”^२

नीचे हम लीलावती के एक उदाहरण को हल करके हिन्दू नियम की करणविधि का स्पष्टीकरण करेंगे।

उदाहरण। “यदि १०० (निष्क) का १ महीने का व्याज ५ (निष्क) हो, तो १६ (निष्क) का १ वर्ष का व्याज क्या होगा? व्याज और मूलधन के ज्ञान में समय, तथा समय और व्याज के ज्ञान में मूलधन भी ज्ञात करो।”

व्याज निकालना—

प्रथम पक्ष है

१०० निष्क, १ महीना, ५ निष्क (फल)।

द्वितीय पक्ष है

१६ निष्क, १२ महीने, ५ निष्क।

दोनों पक्षों की राशियों को निम्न प्रकार से ऊर्ध्वाधर कोष्ठों^३ में लिखते हैं—

१००	१६
१	१२
५	०

^१ इस शब्द के अर्थ के सम्बन्ध में टीकाकारों में मतभेद है। कुछ के मत से इसका अर्थ ‘भाजक’ अथवा ‘हर’ है और कुछ के मत से इसका अर्थ ‘दूसरे पक्ष का फल’ है। दोनों ही अर्थों से नियम शुद्ध है। तथापि, पहले अर्थ को लेने से भास्कर की व्याख्या उनके पूर्ववर्ती लेखकों की व्याख्या से मेल खाती है। यह ध्यान देने योग्य है कि आर्यभट्ट द्वितीय ने इस नियम को दो बार दिया है। पहली बार उन्होंने हरो के पक्ष परिवर्तन की बात नहीं कही है, परन्तु दूसरी बार ऐसा कहा है।

^२ लीलावती, पृ० १८।

^३ एक जाति की राशियों को पास के क्षैतिज कोष्ठों में लिखते हैं।

^४ राशियों को कोष्ठों में इसलिए लिखते हैं कि भिन्नो को लिखने में आसानी हो और इसलिए भी कि फलों का पक्ष-परिवर्तन कर देने के बाद पत चला सके कि किस पक्ष में अधिक राशियाँ हैं। कभी-कभी अज्ञात राशिवाला कोष्ठ खाली

ऊपर पहले पक्ष में सबसे नीचे की राशि ५, प्रथम पक्ष का फल है, दूसरे पक्ष में कोई फल नहीं है। फलों का पक्ष-परिवर्तन करने पर मिलता है

१००	१६
१	१२
०	५

दूसरे पक्ष में राशियों की संख्या अधिक है, और उनका गुणनफल ९६० है। कप राशियों वाले पक्ष की संख्याओं का गुणनफल १०० है। अतएव इष्ट $\frac{९६०}{१००} = \frac{४८}{५}$

अर्थात् ९६ है। हिन्दू लोग इसे इस प्रकार लिखते थे—

फल—

४८
५

 अर्थात् निष्क ९, निष्क-भाग

३
५

 ।

समय निकालना—

इस अवस्था में दो पक्ष ये हैं

१०० निष्क, १ महीना, ५ निष्क,

और १६ निष्क, ५ महीना, ४८ निष्क।

इन्हे पहले की भाँति स्थापित करने पर मिलता है

१००	१६
१	०
५	४८
	५

छोड़ दिया जाता है जैसा कि (गवर्नमेन्ट संस्कृत लाइब्रेरी बनारस में संगृहीत) मुनीश्वर कृत पाटीसार की एक प्रति में मिलता है। जब राशियों को अलग-अलग कोष्ठों में लिखते हैं तब अज्ञात राशि या राशि के अभाव को सूचित करने के लिए ० चिह्न का प्रयोग अनावश्यक है। (ऐशियाटिक सोसायटी बंगाल में संगृहीत) लीलावती की कुछ टीकाओं में राशियों को अलग-अलग कोष्ठों में नहीं लिखा गया है, परन्तु ऐसी अवस्थाओं में राशि के अभाव को ० चिह्न द्वारा सूचित किया गया है। पक्ष-परिवर्तन के बाद, जिस पक्ष में शून्य होता है उसमें दूसरे पक्ष की अपेक्षा अधिक राशियाँ होती हैं।

फलो का, अर्थात् सबसे नीचे के कोष्ठो की सख्याओ का पक्षान्तरण करने पर मिलता है

१००	१६
१	०
४८	५
५	

हरो का पक्ष-परिवर्तन करने पर मिलता है

१००	१६
१	०
४८	५
५	५

यहाँ पर अधिक सख्याएँ पहले पक्ष में है और उनका गुणनफल ४८०० है। दूसरे पक्ष की सख्याओ का गुणनफल ४०० है। अतएव इष्टफल है

$$\frac{४८००}{४००} \equiv \frac{४८००}{४००} = १२ \text{ महीने।}$$

मूलघन निकालना—

प्रथम पक्ष है:

१०० निष्क, १ महीना, ५ निष्क।

द्वितीय पक्ष है:

५ निष्क, १२ महीने, ४८ निष्क।

इन्हे पूर्ववत् इस प्रकार लिखते हैं—

१००	०
१	१२
५	४८
	५

फलो (अर्थात् सबसे नीचे वाले कोष्ठो की राशियों) का पक्ष-परिवर्तन करने पर मिलता है

१००	०
१	१२
४८	५
५	

हरो का पक्ष-परिवर्तन करने पर मिलता है

१००	०
१	१२
४८	५
	५

अधिक सख्याओ वाले पक्ष की मस्याओ के गुणनफल को कम मस्याओ वाले पक्ष की सख्याओ के गुणनफल से भाग देने पर मिलता है

$$\left| \begin{array}{r} ४८०० \\ ३०० \end{array} \right| = १६ \text{ निष्क।}$$

त्रैराशिक, दशा-विशेष के रूप में

ब्रह्मगुप्त के अनुसार उपर्युक्त नियम को त्रैराशिक में भी प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणतः, यदि हम त्रैराशिक के अन्तर्गत दिये हुये उदाहरण १ को लें, तो उसकी राशियों को इस नियम के अनुसार निम्न प्रकार में लिखा जायगा—

२१	०
२	
५	३७
४	४

फलो का पक्ष-परिवर्तन करने पर मिलता है

२१	०
२	
३७	५
४	४

^१ यहाँ पर हम $\frac{५}{२}$ पल चन्दन की लकड़ी को $\frac{३१}{२}$ पण (घन) का 'फल' मानते हैं। पिछले नियम के अनुसार हम $\frac{३१}{२}$ पण को 'फल' या मध्य-राशि मानने को बाध्य हैं, क्योंकि 'प्रथम' और 'तृतीय' राशियाँ सजातीय कही गई हैं। यह देखा जायगा कि यहाँ दिये हुए प्रकारान्तर में तीनों राशियों में से कोई भी एक राशि 'फल' के रूप में ली जा सकती है।

हरो का पक्ष-परिवर्तन करने पर मिलता है —

२१	०
	२
३७	५
४	४

अतएव, इष्टफल है $\frac{२१ \times ३७ \times ४}{२ \times ५ \times ४}$, जो कि पहिले प्राप्त हुआ था।

यदि हम अज्ञात राशि सवन्धी राशियों को फल माने, तो राशियों को निम्न प्रकार स्थापित करना चाहिए —

५	३७
४	४
२१	०
२	

इससे भी पहले की भाँति $\frac{३७ \times ४ \times २१}{५ \times ४ \times २}$ फल मिलता है।

त्रैराशिक की उपर्युक्त करणविधि अरबों में मिलती है^१, परन्तु भारतवर्ष में ब्रह्मगुप्त के बाद इसके दर्शन नहीं होते। इससे सूचित होता है कि अरब वाले हिन्दू गणित-सवन्धी अपने ज्ञान के लिए ब्रह्मगुप्त के विशेष रूप से ऋणी है।

उपर्युक्त लेखनशैली को देखते हुए त्रैराशिक की करणविधि अनुपात के नियम के समान ही प्रतीत होती है। इसी प्रकार बहुराशिक का नियम भी यथोचित रीति से आधुनिक सकेत में परिवर्तित किये जाने पर अनुपातमात्र ही है। स्मिथ^२ महोदय का कथन है कि हिन्दुओं की करणविधि “त्रैराशिक और अनुपात के सम्बन्ध

^१ अधिक राशियोंवाले पक्ष की सख्याओं के गुणनफल को कम राशियोंवाले पक्ष की सख्याओं के गुणनफल से भाग किया गया है। इस अवस्था में ० की राशि नहीं माना गया है। यह केवल अज्ञात राशि, अथवा अभाव का द्योतक है।

^२ उदाहरणतः, रब्बी बेन एज़रा ने ४७ ७ = ६३ : य के स्थान में ४७ ६३ लिखा है। देखिए स्मिथ, पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ४८६ आदि।

^३ पूर्वोक्त ग्रंथ, पृ० ४८८।

को स्वीकार नहीं करती।” इस कथन के पीछे पर्याप्त औचित्य नहीं प्रतीत होता, क्योंकि उक्त करणविधियाँ अनुपात तथा राशि-परिवर्तन की भावना को दृष्टि में रखकर ही बनाई गई हैं। हिन्दू ग्रन्थों का उद्देश्य ऐसा नियम प्रस्तुत करना है जो जनसाधारण द्वारा सुखपूर्वक प्रयोग किया जा सके। इसी कारण, ऐसी अवस्थाओं का भी कथन किया गया है जिनमें त्रैराशिक का व्यत्यास होता है। इस दृष्टि से देखने पर कि इसे विद्यार्थी को स्वयं मोचने का मौका मिलता है कि नहीं, भारतीय नियम अवश्य ही दोषपूर्ण हैं, परन्तु व्यावहारिक उपयोग के लिए, हमारे मत से, इससे अच्छे नियम का सृजन नहीं किया जा सकता था।

१३. व्यावसायिक प्रश्न

प्राचीन भारत में व्याज

व्याज लेने की प्रथा बहुत प्राचीन है। भारतवर्ष में यह प्रथा निश्चित रूप से पाणिनि के समय से देखने में आती है। पाणिनि ने “व्याज, भाडा, लाभ तथा दिये गये कर और उत्कोच” के सम्बन्ध में प्रयुक्त अकसज्ञाओं में ‘क’ उपसर्ग के प्रयोग को प्रमाणित सिद्ध करते हुए नियम दिये हैं।^१ व्याज प्रत्येक महीने के बाद देय होता था, और व्याज की दर प्रायः प्रतिशत थी,^२ यद्यपि सदैव यह बात नहीं। व्याज की दर भिन्न भिन्न स्थानों और भिन्न भिन्न लोगों में भिन्न-भिन्न थी परन्तु प्रतीत होता है कि १५ प्रतिशत प्रतिवर्ष का व्याज उचित समझा जाता था। चौथी शताब्दी ई० पू० में विरचित कौटिल्य के अर्थशास्त्र में लिखा है “११ पण प्रतिमास प्रतिशत का व्याज उचित है। ५ पण प्रतिशत प्रतिमास व्यावसायिक व्याज (की दर) है। १० पण प्रतिशत प्रतिमास वनों में प्रचलित है। और २० पण प्रतिशत प्रतिमास समुद्री व्यापार में प्रचलित है।”^३ गोतम-सूत्र का

^१ पाणिनि, अष्टाध्यायी, ५. १ २२, ४७, ४९।

^२ विभूतिभूषण दत्त ने दिखलाया है कि प्रतिशत की भावना का अभ्युदय भारतवर्ष में हुआ था। अमेरिकन मैथेमेटिकल मथली, जिल्द ३४, पृ० ५३०, में उनका लेख देखिए।

^३ अर्थशास्त्र, आर० शामशास्त्री द्वारा संपादित और अंगरेजी में अनुवादित, मंसूर से प्रकाशित, ३, २, पृ० २१४।

कथन है “५ मापा प्रति-कार्पापण (१ कार्पापण=२० मापा) का व्याज उचित है।”^४

हिन्दू गणित में व्याज

अन्य वस्तुएँ दी रहने पर व्याज, मूलधन अथवा समय इत्यादि ज्ञात करने के साधारण प्रश्न पंचराशिक के प्रकरण में मिलते हैं। हिन्दू ग्रन्थों में एक मिश्रक-व्यवहार नाम का प्रकरण होता है, जिसमें व्याज सम्बन्धी विविध प्रश्न दिये रहते हैं। इस प्रकरण के विषय भिन्न-भिन्न ग्रन्थों में, उनके आकार और विस्तार के अनुसार, न्यूनाधिक हैं। उदाहरणतः, आर्यभटीय में व्याज के सम्बन्ध में केवल एक नियम है, जब कि गणित-सार-संग्रह में इस प्रकार के अनेक नियम और उदाहरण हैं।

वर्ग-समीकरण पर प्रश्न

आर्यभट्ट प्रथम (४९९ ई०) ने निम्न प्रश्न को हल करने का नियम दिया है: कुछ धन ‘घ’ (=१००) एक महीने के लिए व्याज पर दिया गया है (अज्ञात व्याज=य)। अज्ञात व्याज (य) समय ‘स’ (=६) के लिए व्याज पर दिया गया है। इस समय के बीतने पर मौलिक व्याज (य) और उस व्याज का व्याज मिलकर ‘क’ (=१६) के बराबर हो जाता है। धन ‘घ’ पर व्याज की दर (य) ज्ञात करना है।

इस प्रश्न में समीकरण

$$सय^२ + धय - कघ = ०$$

को हल करना पड़ता है, जिससे हमें

$$य = \frac{-ध/२ \pm \sqrt{(ध/२)^२ + कघस}}{स}$$

प्राप्त होता है।

करणी के पहले ऋण चिह्न लेने पर प्रश्न का हल नहीं प्राप्त होता, अतएव ‘य’ का उपयुक्त मान

$$= \frac{\sqrt{कघस + (ध/२)^२} - (ध/२)}{स}$$

^४ गोतम-सूत्र, १२. २६। २० मापा का १ कार्पापण होने के कारण, व्याज की दर १५ प्रतिशत प्रतिवर्ष होती है।

इस फल को आर्यभट्ट प्रथम ने इस प्रकार वर्णन किया है

“मूलघन के व्याज तथा उस व्याज पर प्राप्त व्याज (के योग ‘क’) को समय (स) तथा मूलघन (घ) दोनों में गुणा करो। उस (गुणनफल) में मूलघन के आधे (घ/२) के वर्ग को जोड़ दो। (जो योगफल प्राप्त हो) उसका वर्गमूल निकालो। उस (वर्गमूल) में से मूलघन के आधे (घ/२) को घटा दो, और (शेष को) समय (स) से भाग दे दो। जो (लब्धि) मिले, वही मूलघन (घ) का व्याज है।”

ब्रह्मगुप्त ने अधिक व्यापक नियम दिया है। उनका प्रश्न यह है

मूलघन (घ) ‘स’ महीनो के लिए व्याज पर दिया गया है और उस मूलघन का अज्ञात व्याज (=य) स महीनो के लिए उसी दर से व्याज पर दिया गया है, उस समय के बीतने पर मिश्रघन ‘क’ के तुल्य हो जाता है। ‘य’ का मान ज्ञात करना है।

यहाँ पर निम्न समीकरण बनता है

$$y^2 + \frac{घन_1}{स_1} y - \frac{कधस_1}{स_1} = 0,$$

जिसका हल है

$$y = + \sqrt{\frac{कधस_1}{स_1} + \left(\frac{घस_1}{२स_1}\right)^2} - \frac{घस_1}{२स_1}$$

करणी के ऋणात्मक मान से प्रश्न का हल नहीं प्राप्त होता, अतएव उसका त्याग कर दिया जाता है।

ब्रह्मगुप्त ने निम्न सूत्र दिया है

“मूलघन (घ) को (अपने) समय (स_१) में गुणा करो, और गुणनफल को अन्य समय (स_२) में भाग दो। जो (लब्धि) मिले उसे दो स्थानों पर रखो। एक को मिश्रघन (क) से गुणा करो और (गुणनफल में) हमारे के आधे के वर्ग में जोड़ दो। उस (योगफल) का वर्गमूल निकालो। उस (वर्ग-

^१ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लोक २५। इसमें मूलघन के लिए ‘मूल’ शब्द तथा व्याज के लिए ‘फल’ शब्द का प्रयोग किया गया है।

मूल) में दूसरे के आधे को घटा दो। (जो शेष बचे) वही मूलधन का व्याज (य) है।”^१

अन्य प्रश्न

महावीर ने मिश्रक-व्यवहार में दो अन्य प्रकार के प्रश्न दिये हैं, जिनमें युग-पत् गमीकरणों को हल करने की आवश्यकता पड़ती है। पहले प्रकार के प्रश्नों का एक नमूना यह है ^२

“६० (प्रमाण ‘प्र’) पर १½ महीने (समय ‘स’) का व्याज (फल ‘फ’) २½ है। (अज्ञात धन ‘ध’ पर अज्ञात समय ‘सा’ का) व्याज (फा) २४ है। समय (सा) और मूलधन (ध) का योग (म) ६० है। (समय ‘सा’ और मूल-धन ‘ध’ क्या है) ?”

प्रश्न के अनुसार

$$\frac{\text{फ ध सा}}{\text{प्र म}} = \text{फा} \quad (१)$$

$$\text{ध} + \text{सा} = \text{म} \quad (२)$$

$$\therefore \text{ध} - \text{सा} = \pm \sqrt{\text{म}^2 - \frac{\text{प्र स}}{\text{फ}} \times ४ \text{ फा}}$$

$$\text{अतएव} \quad \text{ध} = \frac{३}{२} \left\{ \text{म} \pm \sqrt{\text{म}^2 - \frac{\text{प्र स}}{\text{फ}} \times ४ \text{ फा}} \right\}$$

महावीर ने इस फल का वर्णन निम्न प्रकार से किया है

“प्रमाण को समय तथा चतुर्गुणित व्याज से गुणा करो और अपने फल से भाग दो, और (प्राप्त लब्धि को) मिश्रधन के वर्ग में घटा दो। उसके मूल को मिश्र-धन में सक्रमण^३ करो (अर्थात् एक बार जोड़ कर और एक बार घटाकर आवा कर दो)।”^४

^१ ब्राह्म-स्फुट-मिद्धान्त पृ० १८३। इस नियम को महावीर ने भी दिया है। देखो गणित-सार-संग्रह पृ० ७१ (श्लोक ४४)।

^२ गणित-सार-संग्रह पृ० ६६ (श्लोक ३२)।

^३ ख को क में सक्रमण करने का अर्थ है $\frac{\text{क} + \text{ख}}{२}$ और $\frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$ के मान का ज्ञात करना।

^४ गणित-सार-संग्रह पृ० ६८ (श्लोक २६)। ध्यान देने योग्य है कि करणी के पूर्व के दोनों चिह्नों का प्रयोग किया गया है।

दूसरे प्रकार के प्रश्नों का एक नमूना यह है

“प्रतिघन (प्रमाण ‘प्र’), प्रति $1\frac{1}{2}$ मास (समय ‘म’), का अज्ञात दर (फल ‘फ’) के अनुसार, ३० (घन ‘व’) का किसी अज्ञात समय (मा) में ५ व्याज (फल ‘फा’) होता है। व्याज की दर (फ) और समय (मा) का योग (म) $12\frac{1}{2}$ है। (व्याज की दर और समय ज्ञात करो)।”

इसका हल निम्नलिखित है

$$मा = \frac{1}{2} \left\{ म + \sqrt{म^2 - \frac{प्र म फा ४}{व}} \right\},$$

और

$$फ = \frac{1}{2} \left\{ म - \sqrt{म^2 - \frac{प्र म फा ४}{व}} \right\}।$$

महावीर ने इसे इस प्रकार कहा है

“मूल (प्रमाण) को अपने समय में, फल में तथा ४ से गुणा करो और (गुणनफल को) अन्य मूल (घन) से भाग दो। इस प्रकार जो मिले, उसे मिश्र-घन के वर्ग में घटाकर शेष का वर्गमूल निकालो, और उसे मिश्रघन में मक्रमण करो।”^१

व्याज सम्बन्धी विविध प्रश्न

“पाटीगणित के हिन्दू ग्रंथों में उपर्युक्त प्रश्नों के अनिश्चित विविध प्रकार के अन्य मनोरंजक प्रश्न मिलते हैं। उदाहरणतः ब्रह्मगुप्त ने निम्नलिखित प्रश्न को हल किया है

उदाहरण। घन ‘व’, जिसका ‘म’ महीने का व्याज ‘र’ है, कितने समय में अपने का ‘क’ गुना हो जायगा ?

इस प्रश्न को हल करने का नियम यह है

“प्रमाण (अर्थात् दिये हुए घन को) अपने समय से गुणा करो और व्याज

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ६९ (श्लोक ३४)।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ६९ (श्लोक ३३)।

की दर से भाग दे दो, और (जो मिले) उसे एकोन गुणक से गुणा कर दो। इस प्रकार से (इष्ट) काल प्राप्त होता है।”

अर्थात्

$$\text{इष्ट समय} = \frac{\text{ध} \times \text{म}}{\text{र}} \times (\text{क}-१) ।$$

गणित सार संग्रह (१५० ई०) में व्याज-गवन्धी अनेक प्रश्न हैं। उनमें से कुछ नीचे दिये जा रहे हैं

(१) “यहाँ (इस प्रश्न में) $(\text{व}_1 =) ४०$, $(\text{व}_2 =) ३०$, $(\text{व}_3 =) २०$, और $(\text{व}_4 =) ५०$ मूलधन है, $(\text{म}_1 =) ५$, $(\text{स}_1 =) ५$, $(\text{स}_2 =) ३$, और $(\text{स}_3 =) ६$ (क्रमानुसार तत्सवन्धी) महीने हैं। उनके फलों (अर्थात् व्याजों) का योग $(\text{म} =) ३४$ है। (यदि व्याज की दर प्रत्येक अवस्था में एक ही हो, तो प्रत्येक धन का जलग्न अलग व्याज ज्ञात करो)।”

मान लो कि १ का १ महीने का व्याज र है, तो

$$र = \frac{\text{फ}_1}{\text{व}_1 \text{स}_1} = \frac{\text{फ}_2}{\text{व}_2 \text{स}_2} = \frac{\text{फ}_3}{\text{व}_3 \text{स}_3} = \dots$$

जहाँ पर फ_1 , फ_2 , फ_3 , ... क्रमानुसार व_1 , व_2 , व_3 पर म_1 , स_2 , स_3 महीनों के व्याज हैं।

अतएव

$$\begin{aligned} \frac{\text{फ}_1}{\text{व}_1 \text{स}_1} &= \frac{\text{फ}_2}{\text{व}_2 \text{स}_2} = \frac{\text{फ}_3}{\text{व}_3 \text{स}_3} = \dots \\ &= \frac{\text{फ}_1 + \text{फ}_2 + \text{फ}_3 + \dots}{\text{व}_1 \text{स}_1 + \text{व}_2 \text{स}_2 + \text{व}_3 \text{स}_3 + \dots} \\ &= \frac{\text{म}}{\text{व}_1 \text{स}_1 + \text{व}_2 \text{स}_2 + \text{व}_3 \text{स}_3 + \dots} \end{aligned}$$

अथवा

$$\text{फ}_1 = \frac{\text{म} \times \text{व}_1 \times \text{स}_1}{\text{व}_1 \text{स}_1 + \text{व}_2 \text{स}_2 + \text{व}_3 \text{स}_3 + \dots}, \text{ इत्यादि।}$$

^१ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० १८१।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७० (श्लोक ३८)।

महावीर ने उपर्युक्त प्रश्न को हल करने के लिए यही मूत्र दिया है।^१

(२) “१०, ६, ३, और १५ व्याज (के धन) हैं, ५, ४, ३ और ६ महीने हैं (जिनमें पूर्वोक्त व्याज के धन क्रमानुसार प्राप्त होते हैं) , और (चारों) मूल-धनों का योग १४० है। (व्याज की दर हर अवस्था में समान मान कर, चांगे मूलधनों को अलग अलग ज्ञात करो) ”^२

(३) “यहाँ (इस प्रश्न में) ४०, ३०, २० और ५० (क्रमानुसार चार) मूलधन हैं, १०, ६, ३ और १५ क्रमानुसार उनके व्याज हैं, और १८ उनके समयों का योग है। व्याज की दर समान मान कर, चारों समयों को अलग अलग ज्ञात करो। ”^३

(४) “८० का ३ महीने का व्याज अज्ञात है, (परन्तु यह पता है कि) यदि वह अज्ञात व्याज (उसी दर से) व्याज पर दे दिया जाय, तो १ वर्ष में वह ७६ हो जायगा। बताओ (अज्ञात) मूल और उसका व्याज कितना है। ”^४

(५) “(तीन) मिश्रधन क्रमशः ५०, ५८ और ६६ हैं, तथा तत्समवधी समय क्रमशः ५, ७ और ९ महीने हैं। (यदि प्रत्येक का मूलधन बराबर हो, तो) अलग अलग व्याज क्या हैं, ज्ञात करो। ”^५

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७० (श्लोक ३७)। इस सूत्र से स्पष्ट है कि महावीर को निम्न परिणाम ज्ञात था

$$\frac{अ}{व} = \frac{स}{द} = \frac{क}{ख} = \dots = \frac{अ + स + क + \dots}{व + द + ख + \dots}$$

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७० (श्लोक ४०)। इसका हल उसी पृष्ठ पर श्लोक ३६ में दिया है।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७० (श्लोक ४३)। इसका हल उसी पृष्ठ पर श्लोक ४२ में दिया है।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७१ (श्लोक ४६)। यह आर्धभट्ट के प्रश्न के सदृश है। ऊपर पृ० २०७ देखिए।

^५ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७१ (श्लोक ४८)। इसको हल करने में सर्वसमिका

$$\frac{अ}{व} = \frac{स}{द} = \frac{अ-स}{व-द}$$

के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है।

(६) “(चारतुल्य धन ४ भिन्न भिन्न समयों के लिए व्याज पर दिये गये हैं।) समय और मूलधन का (अलग अलग) योग क्रमानुसार २१, २३ और २५ है, और व्याज क्रमानुसार ६, १० और १४ है। समान मूलधन क्या है ?”^१

(७) “कुछ धन ६ प्रतिशत की दर से उधार लिया गया और ९ प्रतिशत की दर से उधार दे दिया गया। यदि ३ महीने में इस लेन देन में ८१ का लाभ हुआ, तो वह धन कितना है ?”^२

(८) “६० का मासिक व्याज ५ है। (इस दर से उधार पर दिया गया) मूलधन ३५ है। यदि धन १५ की त्रैमासिक किस्तों (स्कन्धों) में अदा कर दिया जाय तो बताओ कितने समय में पूरा धन चुकता हो जायगा ?”^३

(९) “तीन धन २, ६ और ४ प्रतिशत प्रतिमास की दर से व्याज पर दिये गये, और उनके मिश्रधनो का योग ४४०० है। यदि प्रत्येक धन से २ महीने में बराबर व्याज मिलता हो, तो वे मूलधन कितने कितने हैं ?”^४

(१०) “एक व्यक्ति (जिसने कुछ धन व्याज पर लिया है) प्रत्येक १२ दिन बाद २३ की एक किस्त (स्कन्ध) अदा करता है। यदि व्याज की दर ३ प्रतिशत प्रति मास हो और वह व्यक्ति १० महीने में ऋण मुक्त हो जाय, तो मूलधन क्या है ?

(११) “तीन धन, जिनका योग ८५२० है, क्रमानुसार ३, ५ और ८ प्रतिशत (प्रति मास) की दर से व्याज पर दिये गये। अपने अपने मूलधन में से ५ महीने का अपना अपना व्याज निकाल देने पर वे बराबर हो जाते हैं। (बताओ तीनों धन कितने कितने हैं) ?”^५

(१२) “तीन धन, जिनका योग १३७४० है, क्रमानुसार २, ५ और ९ प्रतिशत

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७२ (श्लोक ५२)।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७२ (श्लोक ५५)।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७३ (श्लोक ५६)।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७३ (श्लोक ६१)।

^५ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७३ (श्लोक ६५)।

^६ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७४ (श्लोक ६७)।

(प्रति मास) की दर से ४ महीने के लिए व्याज पर दिये गये। अपना अपना व्याज जोड़ देने पर वे वन तुल्य हो जाते हैं। (वताओ वे वन क्या है) ?”

(१३) “किसी मनुष्य ने ५ प्रतिशत प्रतिमास की दर से कोई वन ऋण लिया जिसे वह प्रति ६ महीने बाद किस्तों में चुकाता है। पहली किस्त में ७ देता है और आगे की किस्तों में सात-सात की वृद्धि करके देता है (अर्थात् दूसरी में १४, तीसरी में २१, इत्यादि), सबसे बड़ी किस्त ६० है। इस प्रकार वह मनुष्य (७ आदि, ७ चय, और) ६० पदोवाली श्रेढी के योग को मूलधन के रूप में देता है, और उममूत्र-धन पर एक किस्त का व्याज भी देता है। तो वह मूलधन और व्याज वताओ, यह भी वताओ कि वह मनुष्य कितने समय में ऋण में मुक्त होता है।”

वस्तुओं का विनिमय

विनिमय की हिन्दू पारिभाषिक मञ्जा ‘भाण्ड-प्रति-भाण्ड’ है। पाटीगणित के सभी हिन्दू ग्रंथों में वस्तुओं के विनिमय से सम्बन्ध रखनेवाले प्रश्न मिलते हैं। इन ग्रंथों में इस बात का निर्देश रहता है कि विनिमय के प्रश्नों का आधार मिश्रानुपात है तथा वे पञ्चराशिक इत्यादि के नियमों की सहायता में हल किये जा सकते हैं। विनिमय के प्रश्नों का एक नमूना यह है

“यदि इस बाजार में एक द्रम्म में ३०० आम और एक पण में ३० बड़िया अनार मिलते हैं, तो हे मित्र ! शीघ्र वताओ कि १० आमों के बदले में कितने अनार मिलेंगे।”

अन्य प्रकार के व्यावसायिक प्रश्न

हिन्दू गणित के ग्रंथों में मिलनेवाले अन्य विविध प्रकार के व्यावसायिक प्रश्नों में (१) साझा और समानुपातिक विभाग और (२) सुवर्ण के वर्ण की गणना में सम्बन्ध रखने वाले प्रश्न उल्लेखनीय हैं।^१ इन प्रश्नों में से अधिकांश बीजात्मक हैं, परन्तु उनकी गणना पाटीगणित (अकगणित) में की गई है। प्रश्नों को हल करने के नियम प्रश्नों के पूर्व आते हैं। ये नियम इतनी अधिक मात्रा में हैं कि यहाँ पर उनका कथन नहीं किया जा सकता। तो भी नीचे दिये हुए उदाहरणों में उनके आकार-प्रकार के सम्बन्ध में कुछ परिचय मिल जायगा

^१ गणित-सार-मग्नह, पृ० ७४ (श्लोक ६६)।

^२ गणित सार-मग्नह, पृ० ७४-७५ (श्लोक ७२-७३)।

^३ लीलावती, पृ० २०।

^४ ऐसे उदाहरण लीलावती, गणित-सार-मग्नह, त्रिगणिका, इत्यादि में मिलते हैं।

(१) (नी) वनियो ने व्रमानुसार १ से लेकर ९ तक धन लगाकर एक घोड़ा खरीदा, और उसे ४९५ मे बेच दिया। बताओ कि इस मिश्रधन मे प्रत्येक का कितना कितना हिस्सा है।

(२) किमी यजमान ने दीक्षा के अवसर पर चार मठो से, जिनमे बराबर बराबर छात्र थे, छात्रो को भोजन करने के लिए निमन्त्रित किया। परन्तु उन मठो ने $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{5}$ छात्र भोजन के लिये आये। देखने मे आया कि यदि पृथक्-पृथक् मठों से आये हुए छात्रो की संख्याओ मे क्रमशः १, २, ३ और ४ जोड़ दिये जायें तो सब मिलाकर ८७ संख्या आती है, और यदि उनमे क्रमशः १, २, ३ और ४ घटा दिये जायें तो ६७ संख्या आती है। तो बताओ कि मठो की छात्र-संख्या क्या है तथा प्रत्येक मठ मे कितने कितने छात्र (भोजन के लिये) आये।

(३) “३२ पल, ६० पल, और २४ पल आयतनवाले तीन कलम क्रमशः घृत, उदक् और मधु मे लेवाला भरें हुए है। तीनों पदार्थों को एक में मिलाकर, उस मिश्र पदार्थ को उन घडो मे पुन भर दिया गया। घृत, उदक् और मधु की मात्रा किम (कलस) मे कितनी है, मुझे नही मालूम। बताओ प्रत्येक कलम मे उन (पदार्थों) की कितनी-कितनी मात्रा है।”

(४) “किन्ही तीन वनियो ने साझे मे क्रय-विक्रय किया। पहले की पूंजी ६ पुराण है और दूसरे की ८ पुराण, तीमरे की (पूँजी) अज्ञात है। (क्रय-विक्रय मे) ९६ पुराणो का लाभ हुआ, जिसमे से अनात पूंजीवाले को ४० पुराण मिले। हे मित्र ! यदि तुम माझे (प्रक्षेप) की विधि को जानते हो तो गणित करके बताओ कि उस (तीमरे) ने कितनी पूंजी लगायी थी, तथा (अन्य) दोनो वनियो को कितना कितना लाभ हुआ।”

(५) “चार वनियो थे। उनमें मे प्रत्येक ने अपने धन का आधा अन्य (तीन वनियो मे से) प्रत्येक मे ले लिया, और इस प्रकार उनके पाम बराबर बराबर धन हो गया। बताओ प्रत्येक के पाम पहले कितना धन था।”

^१ इस उदाहरण और पिछले दो उदाहरणो को पृथक्दकस्वामो ने ब्राह्म-स्फुट-मिद्धान्त (गणिताध्याय, श्लोक १६) पर अपने भाष्य में दिया है।

^२ गणित-सार-मग्नह, पृ० ६४ (श्लोक २२३-५)।

^३ गणित-सार-मग्नह, पृ० ६६ (श्लोक २६७ $\frac{1}{2}$)।

(६) 'मन्त्र और औषध की शक्ति से मपन्न किसी महापुरुष ने मुर्गों के युद्ध को होते देखकर दोनों मुर्गवाजों से गुप्त भाषा में मन्त्रणा की। एक ने कहा "यदि तुम्हारा मुर्गा विजयी हो तो तुम अपना धन मुझे दे देना, यदि तुम्हांगी विजय न होगी तो मैं उस धन का $\frac{2}{3}$ भाग तुम्हें दे दूंगा।' दूसरे के पास जाकर (उसी प्रतिबन्ध पर) उसके धन का $\frac{3}{4}$ भाग देने की प्रतिज्ञा की। दोनों दशाओं में उसे १२ का लाभ हो सकता था। हे गणकमुखतिलक! बताओ कि उन मुर्गवाजों के पास कितना-कितना धन था।"

(७) "९ मातुलुग (बिजौरा नीबू) और ७ मुगवित कैथों का मिश्रित मूल्य १०७ है, और ७ मातुलुग और ९ मुगवित कैथों का मिश्रित मूल्य १०१ है हे गणक! मातुलुग और कैथों के मूल्यों को अलग अलग करके मुझे शीघ्र बताओ।"

(८) "'३ (पण) में ५ कबूतर, ५ (पण) में ७ मारस, ३ (पण) में ९ हंस, और ९ (पण) में ३ मयूर मिलते हैं। (जाओ इस दर में) राजकुमार के क्रीडार्थ १०० (पण) में १०० (पक्षियाँ) ले आओ।' यह कहकर कोई व्यक्ति (बाजार) भेज दिया गया है। बताओ वह किस (प्रकार की पक्षी को खरीदने) में कितना (धन) व्यय करेगा।"

(९) "१ वर्णवाले (सुवर्ण) का १ भाग है, २ वर्णवाले का १ भाग, ३ वर्णवाले का १ भाग, ४ वर्णवाले के २ भाग, ५ वर्णवाले के ४ भाग, १४ वर्णवाले के ७ भाग, और १५ वर्णवाले के ८ भाग। इनको एक में मिलाकर अग्नि में पकाने पर मिश्रित सुवर्ण का क्या वर्ण होगा? और उस मिश्रित सुवर्ण को पूर्वोक्त भागों के मालिकों में विभाजित करने पर प्रत्येक को कितना कितना मिलेगा?"

(१०) "२, ३ और ४ वर्णों के तीन तीन सुवर्ण हैं और १३ वर्ण के कुछ

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ६६-१०० (श्लोक २७० $\frac{3}{4}$ - २३)।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८४ (श्लो० १४० $\frac{3}{4}$ - २३)।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८५ (श्लो० १५२ - ३)।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८८ (श्लो० १७० - १०)।

सुवर्ण है, मिश्रित सुवर्ण का वर्ण १० है। हे मित्र वताओ। (१३ वर्ण के अज्ञात) सुवर्णों की मर्यादा क्या है।”^१

१४ विविध प्रश्न

इष्ट-कर्म

यह नियम अंगरेजी में ‘ग्रेगुला फाल्सी’ अथवा ‘रूल ऑव फाल्स पोजीशन’ के नाम से प्रसिद्ध है। हिन्दू गणित की सभी पुस्तकों में यह नियम उपलब्ध है।^२ भास्कर द्वितीय ने इस नियम को विशेष महत्त्व दिया है और इसे ‘इष्ट-कर्म’ (“कल्पना का नियम”) कहा है। उन्होंने इसका निम्न प्रकार से वर्णन किया है

“किमी कल्पित मर्यादा को प्रश्न के कथनानुसार गुणा करना, भाग देना, घटाना अथवा जोड़ना चाहिए। दी हुई (‘इष्ट’) मर्यादा को कल्पित मर्यादा में गुणा करके उसे (उपर्युक्त विधि से प्राप्त) मर्यादा द्वारा भाग देना चाहिए। इस प्रकार इष्ट राशि की प्राप्ति होती है। यही इष्ट-कर्म कहलाता है।”^३

श्रीधर ने कल्पित मर्यादा को एक मान लिया है।^४ महावीर ने विविध प्रकार के प्रश्नों में इस नियम को प्रयोग किया है।^५ गणेश ने लीलावती पर अपनी टीका में लिखा है “इस नियम में केवल गुणा, भाग और भिन्न के परिकर्मों का प्रयोग करना होना है।” निम्नलिखित उदाहरणों से ऐसे प्रश्नों के आकार-प्रकार का स्पष्टीकरण हो जायगा जो कल्पना की विधि में हल किये जाते हैं।

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८६ (श्लो० १८१)। इस प्रकार के उदाहरण त्रिगुणिका (पृ० २६) और लीलावती (पृ० २५) में भी मिलते हैं।

^२ यह नियम भारतवर्ष में आदिष्कृत हुआ और वहाँ से अरब होकर यूरोप को गया। एक मध्यकालीन हस्तलिपि में, जो लिब्री महोदय द्वारा इस्तेवार्, १, ३०४ में प्रकाशित की गयी है तथा जो सभवतः रब्बी बेन एज़रा की कृति है, यह नियम हिन्दुओं को आरोपित किया गया है। अधिक विस्तार और उल्लेखों के लिए, देखिए स्मिथ, हिस्ट्री, जिल्द २, पृ० ४३७, फुटनोट १।

^३ लीलावती, पृ० १०।

^४ त्रिगुणिका (पृ० १३) में स्तम्भोद्देशक का नियम देखो।

^५ ये प्रश्न गणित-सार-संग्रह के तृतीय और चतुर्थ अध्याय में दिये गये हैं।

(१) 'निर्मल कमलों के जिस समूह के तृतीयांश, पचमांश और षष्ठमांश में क्रमशः शिव, विष्णु और सूर्य की, चतुर्थांश में पार्वती की, और शेष छ कमलों में गुरुचरणों की पूजा की गई, उस (कमल समूह) के सम्पूर्ण कमलों की मर्याा भीत्र बताओ।'^१

(२) "हारवती स्त्री का मुक्ताहार मुरतिकलह में टूट गया, उसका तृतीयांश भूमि पर गिरा, पचमांश शयनतल पर दिखायी पड़ा, षष्ठमांश उस मुन्दर केशवली स्त्री ने पकड़ लिया, और दशमांश उसके पति ने रोक लिया, छ मोतियाँ हार के डोरे में देख पड़ी। हे गणक ! बताओ वह हार कितनी मोतियों का था।"

(३) "स्तम्भ के $\frac{1}{8}$ में गुणित स्तम्भ का $\frac{1}{8}$ जल में स्थित है, शेष के $\frac{7}{8}$ में गुणित शेष का $\frac{1}{8}$ कीचड़ में है, और (शेष) २० हाथ स्तम्भ आकाश में है। हे मित्र ! स्तम्भ की लम्बाई बताओ।"

(४) 'भार के कारण झुकी हुई बालियों में मुशोभित वान के घेन में कुछ तोते बैठे थे। मनुष्यों द्वारा डराये जाने में वे सहसा उड़ गये। उनका $\frac{1}{2}$ भाग पूर्व दिशा को गया, और $\frac{1}{2}$ भाग आग्नेय दिशा को। पूर्व और आग्नेय दिशाओं को गये हुए तोनों के अन्तर के अर्धभाग का अर्धभाग दक्षिण दिशा को गया, दक्षिण और आग्नेय दिशाओं को गये हुए तोनों के अन्तर का द्वि-पचोत्तभाग नैऋत दिशा को गया, दक्षिण और नैऋत दिशाओं को गये हुए तोनों के अन्तर के तुल्य तोते पश्चिम दिशा को गये, नैऋत और पश्चिम को गये हुए तोनों के अन्तर तुल्य तथा उसके $\frac{1}{2}$ तुल्य और तोते वायव्य दिशा को गये, वायव्य और पश्चिम को गये हुए तोनों के अन्तर तुल्य तथा उसके $\frac{1}{2}$ तुल्य और तोते उत्तर को गये, वायव्य और उत्तर को गये हुए तोनों के योग में उसका $\frac{1}{2}$ भाग घटाने पर प्राप्त शेष के तुल्य तोते ईशान दिशा को गये, और शेष २८० तोते (वही पर) आकाश में (मँडराने हुए) देखे गये। बताओ मत्र तोते कितने थे।"

^१ लीलावती, पृ० ११। तुलना कीजिए गणित-सार-संग्रह, पृ० ४८ (श्लो० ७)।

^२ त्रिशतिका, पृ० १४। इस उदाहरण को गणित-सार-संग्रह (पृ० ८६, श्लो० १७-२२) में दिये हुए उदाहरण से तुलना कीजिए।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० ५५ (श्लो० ६०)। तुलना कीजिए, त्रिशतिका, पृ० १३।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८८ आदि (श्लो० १२-१६)।

विलोम विधि

यह विधि, जो विलोमगति ("उल्टा चलने की विधि") के नाम से विख्यात है, भारतवर्ष में अत्यन्त प्राचीन काल से मिलती है। आर्यभट्ट प्रथम ने इसका वर्णन निम्न प्रकार से किया है

"विलोम विधि मे गुणकार भागहार हो जाता है और भागहार गुणकार, जिसे जोड़ना है, वह घटाया जाता है और जिसे घटाना है, वह जोड़ा जाता है।"

ब्रह्मगुप्त का वर्णन अधिक पूर्ण है। वे कहते हैं

"अतः (मे दो हुई सख्या) से आरम्भ करके गुणा करने के स्थान में भाग करो, भाग करने के स्थान में गुणा करो, जोड़ने के स्थान में घटाओ, घटाने के स्थान में जोड़ो, वर्ग करने के स्थान में वर्गमूल निकालो, और वर्गमूल निकालने के स्थान में वर्ग करो। इस प्रकार क्रिया करने पर आरम्भ की राशि प्राप्त हो जाती है।"

नीचे दिये हुए उदाहरणों में विलोमविधि में हल किये जाने वाले प्रश्नों के स्वरूप स्पष्ट हो जायेंगे —

(१) "वह कौन सख्या है जिसे ७ से भाग देने पर, फिर ३ से गुणा करने पर, फिर वर्ग करने पर, फिर ५ जोड़ देने पर, फिर ३ से भाग देने पर, और फिर आधा करके वर्गमूल लेने पर ५ प्राप्त होता है?"

(२) "सूर्य के अश्वेष को यदि ७ से भाग दे, फिर लव्वि का वर्गमूल निकाले, फिर वर्गमूल में ८ घटाकर ९ से गुणा करे, और गुणनफल में १ जोड़ दे, तो १०० मिलता है। यह परिस्थिति बुधवार के दिन कब होगी?"

^१ आर्यभटीय, गणितपाद, श्लो० २८।

^२ ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त पृ० ३०१। यह नियम गणित-सार-संग्रह (पृ० १०२, श्लो० २८६), महा-सिद्धान्त (पृ० १४६), लीलावती (पृ० ६), इत्यादि में भी मिलता है।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० १०२ (श्लो० २८७)। इस प्रकार के उदाहरण हिन्दू अकगणित के ग्रंथों में बहुतायत से मिलते हैं। यूरोप में भी वे सामान्य रूप से मिलते हैं। स्मिथ ने अपनी ट्रिस्टी (भाग २) में ऐसे दो उदाहरण सोलहवीं शताब्दी में लिखी अमेरिकन अकगणित से उद्धृत किये हैं।

^४ बोलब्रुक, पूर्वोक्त पृ० ३३३ (१८)।

मिश्रण सम्बन्धी प्रश्न

पाटीगणित के हिन्दू ग्रंथों में मिश्रक-व्यवहार नाम का एक अध्याय होता है जिसमें व्याज-सम्बन्धी विविध प्रश्न, सुवर्ण की मिलावट में सम्बन्ध रखने-वाले प्रश्न, तथा मिली हुई राशियों में सम्बन्ध रखनेवाले अन्य विविध प्रकार के प्रश्न, (जिनमें उन राशियों को अलग करना होता है) और उनको हल करने के नियम दिये रहते हैं। अकगणित के प्रारम्भिक इटैलियन ग्रंथों में 'मिश्रण' (डे मेस्कोलो) पर एक अध्याय मिलता है, जिसका कारण स्पष्टतया हिन्दू प्रभाव है।^१

इस अध्याय के कुछ प्रश्न निर्णयात्मक होते हैं और कुछ अनिर्णयात्मक। व्याज और सुवर्ण सम्बन्धी कुछ प्रश्न पहले दिये जा चुके हैं^२, कुछ नीचे दिये जा रहे हैं

(१) "किसी वन के मध्य में अनारों की तीन राशियों को ७ यात्रियों में बराबर-बराबर बाँटने पर १ अनार शेष बचा, (वैसी ही) सात राशियों को ९ यात्रियों में बाँटने पर ३ अनार शेष बचे, और (वैसी ही) पाँच राशियों को ८ यात्रियों में बाँटने पर २ अनार शेष बचे। हे गणक! बताओ (प्रत्येक राशि में) कितने अनार थे।"^३

(२) "किसी पुरुष द्वारा कुछ आम घर लाने पर, उसके गवने बड़े लडके ने पहले १ आम और फिर शेष के आधे आम ले लिये। उसके चले जाने पर उसमें छोटे लडके ने भी वैसा ही किया। शेष के आधे आमों को अन्य (तीसरे) लडके ने ले लिया। (बताओ वह मनुष्य कितने आम घर लाया था)।"^४

(३) "एक जैनधर्मावलम्बी (श्रावक पुरुष) सुगन्धित कमलपुष्पों को लेकर चतुर्धारीवाले जैन-मन्दिर को गया और वहाँ भक्तिपूर्वक पूजन किया। (मन्दिर

^१ स्मिथ, हिस्ट्री, जिल्द २, पृ० ५८८, नोट ४।

^२ देखिए व्यावसायिक प्रश्न, पृ० २१६ आदि, समानुपातिक विभाग (प्रक्षेप-करण) के प्रश्न भी देखिए त्रिशतिका, पृ० २६, गणित-सार-संग्रह, पृ० ७५ (श्लो० ७६३), महा-सिद्धान्त, पृ० १५४-१५५।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८२ (श्लो० १२८३)। महावीर ने इस प्रकार के उदाहरण 'वल्लिका-कुट्टीकार' के अन्तर्गत दिया है।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८२ (श्लो० १३१३)।

के) पहले द्वा पर पहुँचने पर पुष्पो की सख्या दुगुनी हो गयी, दूसरे पर तिगुनी, तीसरे पर चौगुनी, और चौथे पर पँचगुनी। यदि मव द्वारो पर साठ साठ^१ पुष्प चढ़ाये गये, तो पुष्पो की सख्या (आरम्भ में) कितनी थी ?^२

(४) "एक मनुष्य के पास १६ इन्द्रनील-मणियाँ हैं, दूसरे के पास १० मरकत-मणियाँ हैं, और तीसरे के पास ८ वज्रमणियाँ हैं। तीनों मनुष्य अपनी अपनी मणियों में से दो दो मणियाँ एक दूसरे को दे देते हैं, इस प्रकार उनका धन समाप्त हो जाता है। तो इन्द्रनीलमणि, मरकतमणि और वज्रमणि के मूल्य क्या क्या हैं ?"^३

(५) "जो नालियाँ (कुत्त) अलग अलग खाली जाने पर एक वापी को क्रमानुसार १ दिन, $\frac{१}{२}$ दिन, $\frac{१}{४}$ दिन और $\frac{१}{८}$ दिन में भर देती हैं वे एक साथ खोल दी जाने पर उस वापी को कितने समय में भर देगी ?"^४

वर्ग-समीकरण पर प्रश्न

वर्ग-समीकरण का हल भारतवर्ष में आर्यभट्ट प्रथम (४९९ ई०) के समय से ज्ञान है। पीछे हम व्याज के कुछ प्रश्न दे चुके हैं जिनमें वर्ग-समीकरण को हल करने की आवश्यकता पड़ती है। महावीर और भास्कर द्वितीय ने ऐसे अनेक प्रश्न दिये हैं। महावीर ने इन प्रश्नों को दो भागों में विभाजित किया है (१) वे प्रश्न जिनमें अज्ञात राशि के वर्गमूल का कथन किया रहता है, और (२) वे जिनमें अज्ञात राशि के वर्ग का निर्देश रहता है। पहले प्रकार के प्रश्नों का केवल एक घनात्मक उत्तर आता है, जबकि दूसरे प्रकार के प्रश्नों के दो उत्तर आते हैं जो वर्गसमीकरण के दो मूलों से मगति रखते हैं। भास्कर द्वितीय ने अपने पाटीगणित के ग्रंथ लीलावती में पहले प्रकार के प्रश्नों को स्थान दिया है। दूसरे प्रकार के प्रश्नों को, जिनमें अज्ञात राशि के वर्ग का कथन होता है, बीजगणित में रखा है। निम्न उदाहरणों से ऐसे प्रश्नों के स्वरूप स्पष्ट हो जायेंगे

^१ छपी हुई पुस्तक में 'पञ्च' (पाँच) पाठ है। इस पाठ को स्वीकार करने पर इस प्रश्न का उत्तर ४३/१२ आता है, जो अयुक्त है। छपी हुई पुस्तक में कुछ और भी प्रश्न हैं जिनके अयुक्त उत्तर आते हैं। वे सब, हमारी समझ में, संपादक महोदय द्वारा प्रयुक्त हस्तलिपियों के दोष के कारण हैं। अतएव हमने उपर्युक्त पाठ को सशोधन करके 'षष्ठि' (साठ) कर दिया है।

^१ गणित-सार-संग्रह, पृ० ७६ (श्लो० ११२ $\frac{१}{२}$ -११३ $\frac{१}{२}$)।

^२ गणित-सार-संग्रह, पृ० ८७ (श्लो० १६५-१६६)।

^३ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० १७७ (टीका), लीलावती, पृ० २३।

(१) "ऊँटों के एक झुंड का चतुर्थांश जंगल में दिम्बाई दिया, उम (झुंड) के वर्गमूल का दुगुना पर्वत की तराई को गया है, (शेप) १५ ऊँट नदी के तट पर विद्यमान है। उन ऊँटों की मस्या क्या है ?"

(२) "हाथियों के एक झुंड के वर्गमूल का $५\frac{३}{४}$ गुना पर्वत की तराई में रमण कर रहा है, शेप का $\frac{५}{४}$ पर्वत-गिखर पर रमण कर रहा है, शेप के वर्गमूल का ५ गुना कमलो के वन में रमण कर रहा है, शेप ६ हाथी नदी के तट पर रमण कर रहे हैं। (मत्र मिला कर) वे हाथी कितने हैं ?"

(३) "जन्तुरहित प्रदेश में स्थित ओर नाना प्रकार के पेड़ पीवों में मुगों-भित उपवन में बैठे हुए मुनियों के वर्गमूल तुल्य पुनि एक वृक्ष के नीचे योगावस्था में है। शेप का $\frac{१}{४}$, पुन शेप का वर्गमूल, पुन शेप का $\frac{३}{४}$, पुन शेप का वर्गमूल, पुन शेप का $\frac{३}{४}$, पुन शेप का वर्गमूल, पुन शेप का $\frac{३}{४}$, पुन शेप का वर्गमूल, पुन शेप का $\frac{३}{४}$, पुन शेप का वर्गमूल, पुन शेप का वर्गमूल— ये उन (मुनियों) के अंश हैं जो (क्रमशः) -काव्यशिक्षण, वर्मशास्त्र, तर्कशास्त्र और नीतिशास्त्र के विद्वान् हैं, जो वाद-विवाद, छन्द शास्त्र, ज्योतिष शास्त्र, मन्त्र-शास्त्र, अलंकार शास्त्र, और गव्द शास्त्र (व्याकरण) के ज्ञाता हैं, जो १२ प्रकार की तपस्याओं के प्रभाव में युक्त हैं तथा जो १२ प्रकार के अगशास्त्रों में कुशल हैं।

^१ गणित-सार-मग्नह, पृ० ५१ (श्लो० ३४)। यह प्रश्न 'मूल-जाति' का है और इसमें $y - (कय + ख\sqrt{y} + ग) = ०$ की भाँति का समीकरण बनता है। इसे हल करने का नियम गणित-सार-मग्नह, पृ० ५० (श्लो० ३३) में वर्णित है।

^२ गणित-सार-मग्नह, पृ० ५२ (श्लो० ४६)। यह प्रश्न 'शेप-मूल' जाति का है। इसमें निम्न समीकरण बनता है

$$y - \frac{३\frac{३}{४}}{\sqrt{y}} - \frac{५}{४}(y - \frac{३\frac{३}{४}}{\sqrt{y}})$$

$$- ५\sqrt{\{y - \frac{३\frac{३}{४}}{\sqrt{y}} - \frac{५}{४}(y - \frac{३\frac{३}{४}}{\sqrt{y}})\}} = ६।$$

महावीर ने $२ = y - \frac{३\frac{३}{४}}{\sqrt{y}} - \frac{५}{४}(y - \frac{३\frac{३}{४}}{\sqrt{y}})$ कल्पना करके इसे समीकरण $२ - ५\sqrt{२} = ६$ में परिणत कर लिया है। व्यापक परिस्थिति में इसी प्रकार का समीकरण पुन प्राप्त होता है, जिसे उसी स्वरूप में पुन परिणत कर लिया जाता है, इसी प्रकार बार बार परिणत करने पर अन्त में $y - क\sqrt{y} = ख$ की भाँति का समीकरण प्राप्त होता है, जिसमें y का मान सरलता से निकल आता है।

इनके अतिरिक्त १२ मुनि और हैं। हे मुनिचन्द्र ! मुनियों की (उक्त) समिति की सख्या कितनी है ?”^१

(४) “(भ्रमर-पुज का) एक भ्रमर आकाश में देख पड़ा, शेष का $\frac{१}{४}$, पुन शेष का $\frac{१}{४}$, पुन शेष का $\frac{१}{४}$, तथा भ्रमर पुज के वर्गमूल तुल्य भ्रमर कमलों में हैं, २ भ्रमर आम्र (के वृक्ष) पर हैं। सब (भ्रमर) कितने हैं ?”^२

(५) “एक शूकर-समूह (त्रोडीघ) के आधे के वर्गमूल के चौगुने शूकरो ने चीतो से विक्रीडित वन में प्रवेश किया, शेष के $\frac{१}{४}$ के वर्गमूल के ८ गुने शूकर पर्वत पर चढ़ गये, पुन शेष के आधे के वर्गमूल के ९ गुने नदी-तट (वप्र) पर पहुँचे, ५६ शूकर वन में (अन्यत्र) देखे गये। उन (शूकरो) की सख्या बताओ।”^३

(६) “राजहंसों के एक झुंड का वर्गमूल और ६८ के सहित वही वर्गमूल—इन दोनों का जोड़ ३४ है। बताओ उस झुंड में कितने राजहंस हैं।”^४

(७) “रण में क्रुद्ध होकर अर्जुन ने कर्ण को मारने के लिए बाण चलाये। आधे बाणों से उस (कर्ण) के बाणों का निवारण करके, (चलाये हुए समस्त बाणों के) वर्गमूल के चौगुने से उसके घोड़ों को मार डाला, तीन बाणों से (क्रमशः)

^१ गणित-मार-मग्नह, पृ० ५२ (श्लो० ४२-४५)। यह प्रश्न भी उसी जाति का है जिस जाति का पूर्वगामी प्रश्न था। जो समीकरण इस प्रश्न के अनुसार बनेगा उसे सरल करने के लिए ६ बार उत्थापन करना पड़ेगा।

^२ गणित-मार-मग्नह, पृ० ५३ (श्लो० ४८)। यह प्रश्न द्विरग्र-शेष-मूल जाति का है।

^३ गणित-मार-मग्नह, पृ० ५४ (श्लो० ५६)। यह प्रश्न अश-मूल जाति का है, जिसमें वर्गमूल के भिन्नांशों का कथन किया जाता है। इस प्रश्न से निम्न प्रकार का समीकरण बनता है

$$y - k_1 \sqrt{x}, y - k_2 \sqrt{x}, (y - k_1 \sqrt{x}, y)$$

$-k_3 \sqrt{x} [(y - k_1 \sqrt{x}, y) - k_2 \sqrt{x} (y - k_1 \sqrt{x}, y)] -$ = च
बार-बार उत्थापन करके महावीर इसे निम्न स्वरूप के समीकरण में परिणत करते हैं :

$$y - k \sqrt{xy} - c = 0$$

^४ गणित-मार-मग्नह, पृ० ५६ (श्लो० ६८)। यह प्रश्न मूल-मिश्र जाति का है, जिसमें वर्गमूलों के योग का कथन किया जाता है। इससे निम्न प्रकार का समीकरण बनता है,

$$\sqrt{y} + \sqrt{y+d} = m$$

छत्र, ध्वजा और वनूप का खटन किया, और एक वाण में उसका शिर काट दिया।
(वताओ) अर्जुन ने कितने वाण चलाये ?”

(८) “भ्रमर-ममूह के आवे के वर्गमूल तुल्य भ्रमर मालती-वृक्ष की ओर गये हैं, उसी ओर समस्त भ्रमरो के ६ भी गये हैं। एक भ्रमरी उम भ्रमर के गुजन को प्रतिध्वनित कर रही हैं, जो रात्रि में परिमल के लोभ में वशीभूत होकर कमल के अन्दर वन्द हो गया था (और अब अन्दर ही अन्दर गुजन कर रहा है)। हे मुन्दरी! भ्रमरो की मर्या वताओ।”

अज्ञात राशि के वर्ग पर प्रश्न

(९) “स्तम्भ के ३८ से गुणित स्तम्भ का १२ जल में स्थित है, शेष के १३ में गुणित शेष का ३८ कीचड़ में है, और (शेष) २० हाथ स्तम्भ आकाश में है। हे मित्र! स्तम्भ की लंबाई बताओ।”^१

(१०) “हाथियों के झुंड के दशमांश में २ घटाकर जो मर्या प्राप्त हो उसे उसी मर्या से गुणा करो, इस प्रकार जो मर्या प्राप्त होती है उतने हाथी सल्लकी वन में क्रीड़ा कर रहे हैं, (शेष) ३६ हाथी पर्वत पर विचरण कर रहे हैं। (वताओ मव) हाथी कितने हैं ?”^२

१५ शून्य-गणित

यह दिखाया जा चुका है कि ईसवी सन् के आरम्भ के लगभग भारतवर्ष में शून्य का आविष्कार किया गया था जिसमें कि अको को दस के आधार पर लिखने

^१ लीलावती, पृ० १६।

^२ लीलावती, पृ० १६।

^३ गणित-सार-संग्रह, पृ० ५५ (श्लो० ६०)। इस प्रश्न से निम्न समीकरण मिलता है

$$\left(y - \frac{y^2}{12 \times 30}\right) - \frac{1 \times 3}{20 \times 16} \left(y - \frac{y^2}{12 \times 30}\right)^2 = 20,$$

जो इष्ट-कर्म से भी हल हो सकता है। महावीर ने $y - \frac{y^2}{12 \times 30} = r$ रखा

है, और तब समीकरण $r - \frac{3}{320} r^2 = 20$ को हल किया है। इसके अनन्तर

y के मान निकालने के लिए इस समीकरण के मूलों का प्रयोग किया जाता है।

^४ गणित-सार-संग्रह, पृ० ५५ (श्लो० ६३)।

में सुविधा हो। हिन्दू मस्तिष्क को तब तक चैन नहीं मिला जब तक शून्य सम्बन्धी सम्पूर्ण गणित का विकास नहीं हो गया। शून्य की गणना हिन्दू लोग अको मे करते थे और वक्षाली हस्तलिपि के मूल की रचना के समय (ल० ३०० ईसवी मे) वे लोग अपनी अकगणित मे उसका प्रयोग करते थे। शून्य को जोड़ने और घटाने के परिकर्मों का उल्लेख प्रमगवश वराहमिहिर (ल० ५५० ई०) की पच-सिद्धान्तिका मे हुआ है। दशमलव गणित का सर्वस्व भास्कर प्रथम (६२९ ई०) के आर्यभटीय-भाष्य मे उपलब्ध है। अन्य परिकर्म के निष्कर्ष ब्रह्मगुप्त (६०८ ई०) तथा अन्य णरवर्ती लेखकों की कृतियों में मगृहीत है। हिन्दुओं की अकगणित मे मिलने वाला शून्य गणित का विवेचन उनके बीजगणित के विवेचन से भिन्न है। इस भेद को पूर्णतया स्पष्ट करने के लिए नीचे हम पाटीगणित (अकगणित) और बीजगणित मे मिलने वाले शून्य सम्बन्धी निष्कर्षों को अलग-अलग उपस्थित करेगे।

अकगणित में शून्य

अकगणित मे हिन्दुओं ने शून्य की परिभाषा इस प्रकार दी है

$$अ-अ=०$$

यह परिभाषा ब्रह्मगुप्त के ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त मे मिलती है।^१ बाद के सब ग्रंथो मे भी इसी को दोहराया गया है। घटाने मे इस परिभाषा का सीधा प्रयोग होता है। अकगणित के परिकर्मों को करने मे यह जानना आवश्यक होता है कि किसी मख्या मे शून्य को जोड़ने या घटाने से, अथवा शून्य मे किसी मख्या को जोड़ने या घटाने से, अथवा शून्य को किसी मख्या से गुणा या भाग करने से, अथवा शून्य मे किसी मख्या को गुणा या भाग करने से क्या परिणाम मिलता है। हिन्दू लोग अक-गणित मे शून्य द्वारा किये गये भाग को वैध नहीं मानते, परन्तु शून्य को किसी अन्य मख्या द्वारा किये गये भाग को वैध मानते है। नारायण ने अपनी पाटीगणित (अकगणित) मे इस भेद को स्पष्टतया बतलाया है। वे कहते है

“यहाँ, पाटीगणित मे, ख हर का प्रयोग करने से लोक-व्यवहार मे इसका प्रमाण

^१ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० ३०६। शून्य-परिकर्म सम्बन्धी विस्तृत विवरण के लिए देखिए, बिभूतिभूषण दत्त, बुलेटिन कलकत्ता मैथेमेटिकल सोसायटी, जिल्द १८, पृ० १६५-१७६।

नहीं माना जाता, अतएव यहाँ ख-हर का प्रयोग नहीं किया गया है। वीजगणित में इसका व्यवहार होने के कारण, हमने अपनी वीजगणित में ख-हर का कथन किया है।”^१

नीचे हम पाटीगणित के हिन्दू ग्रंथों में बतलाये गये शून्य-परिकर्म सम्बन्धी निष्कर्षों को दे रहे हैं

श्रीधर कहते हैं

“यदि शून्य में किसी सख्या को जोड़ दे तो योगफल जोड़ी हुई सख्या के तुल्य मिलता है। यदि किसी सख्या में शून्य को जोड़ दे या घटा दे तो उस सख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता। यदि शून्य को गुणा इत्यादि^२ करे तो फल शून्य ही मिलता है। यदि किसी सख्या को शून्य से गुणा करे तो भी गुणनफल शून्य ही मिलता है।”^३

आर्यभट्ट द्वितीय अपने महा-सिद्धान्त में पाटीगणित नामक अध्याय में लिखते हैं

“यदि किसी सख्या में शून्य को जोड़ दे तो उस सख्या में कोई विकार नहीं होता, शून्य को घटाने पर भी यही बात होती है। शून्य को गुणा, भाग, वर्ग, इत्यादि करने पर फल शून्य मिलता है।”^४

नारायण अपनी पाटीगणित में कहते हैं

“यदि किसी सख्या में शून्य को जोड़ या घटा दे तो उस राशि में कोई परिवर्तन नहीं होता। यदि किसी राशि को शून्य में गुणा करे तो गुणनफल शून्य मिलता है, यदि शून्य को किसी सख्या में गुणा करे तो भी गुणनफल शून्य मिलता है। यदि शून्य में कोई सख्या जोड़ दे तो योगफल जोड़ी हुई सख्या के तुल्य आता है।”

^१ गणित-कौमुदी, प्रकरण १, श्लो० ३० की टीका।

^२ इत्यादि से तात्पर्य है (१) शून्य को किसी सख्या से भाग देने से, (२) शून्य का वर्ग करने या वर्गमूल निकालने से, और (३) शून्य का घन करने या घनमूल निकालने से, जो कि हिन्दू गणित के ग्रंथों में परिकर्म के कथन का क्रम है।

^३ त्रिशतिका, पृ० ४। ध्यान देने की बात है कि $a \times 0$ और $0 \times a$ में भेद किया गया है, यद्यपि दोनों परिस्थितियों में गुणनफल शून्य है।

^४ महासिद्धान्त, पृ० १४६।

^५ गणित-कौमुदी, प्रकरण १, श्लो० ३०।

महावीर अपने गणित-सार-सग्रह में लिखते हैं

“यदि किसी सख्या को शून्य से गुणा करे तो गुणनफल शून्य मिलना है ॥ यदि किसी सख्या को शून्य से भाग दे या उसमें शून्य को जोड़ या घटा दे तो उस सख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता। यदि शून्य को किसी सख्या से गुणा करे तो गुणनफल शून्य मिलता है, और यदि शून्य में कोई सख्या जोड़ दे तो योग जोड़ी हुई सख्या के नुत्य आता है।”^१

महावीर का कथन कि शून्य से भाग देने पर भाग दी हुई सख्या में परिवर्तन नहीं होता है स्पष्टतया अशुद्ध है। इसका शुद्ध उत्तर महावीर से तीन शताब्दी पहले के गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त को विदित था। अतएव आश्चर्य की बात है कि महावीर ने इस प्रकार का अशुद्ध कथन किया है। संभव है कि जहाँ तक अक-गणित का संबंध है वे शून्य द्वारा किये गये भाग को भाग हीन समझते हों।

बीजगणित में शून्य

बीजगणित में शून्य की चर्चा सबसे पहले ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त^२ (६२८ ई०) में मिलती है

“ऋणात्मक सख्या में शून्य घटाने पर शेष ऋणात्मक मिलता है, धनात्मक सख्या में शून्य घटाने पर शेष धनात्मक मिलता है, शून्य में शून्य घटाने पर शून्य मिलता है।”

“शून्य और ऋणात्मक सख्या, शून्य और धनात्मक सख्या, तथा शून्य और शून्य, प्रत्येक का गुणनफल शून्य है।”

“शून्य को शून्य में भाग देने का फल शून्य है। ऋणात्मक अथवा धनात्मक सख्या को शून्य में भाग देने का फल ‘तच्छेद’ (ऐसी भिन्न जिसका वही हर हो), शून्य को ऋणात्मक अथवा धनात्मक सख्या से भाग देने का (फल शून्य है अथवा वह भिन्न है जिसका अंश शून्य है और हर ऋणात्मक अथवा धनात्मक सख्या)।”^३

^१ गणित-सार-सग्रह, पृ० ६ (श्लो० ४६)।

^२ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त, पृ० ३०६-३१०, नियम ३१-३५। इन नियमों में धनात्मक और ऋणात्मक सख्याओं के परिकर्मों के नियम भी सम्मिलित हैं। यहाँ पर केवल शून्य सम्बन्धी नियमों का कथन किया गया है।

^३ परिकर्म का फल जो ब्रैकेट में दिया हुआ है सुधाकर द्विवेदी की व्याख्या के अनुसार है।

भास्कर द्वितीय ने लीलावती तथा अपनी बीजगणित में शून्य-परिकर्म मन्वी गणकर्मों का कथन किया है। लीलावती में वे लिखते हैं,

“शून्य में किसी सख्या को जोड़ने पर योगफल जोड़ी हुई सख्या के तुल्य आता है। शून्य का वर्ग इत्यादि (अर्थात् वर्ग, वर्गमूल, घन और घनमूल) करने पर भी फल शून्य मिलना है। किसी सख्या को शून्य से भाग देने पर हर में शून्य हो जाता है। किसी सख्या को शून्य में गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है, परन्तु वाद में यदि और परिकर्म करने हैं तो (गुणनफल को शून्य न लेकर) शून्य को गुणक की तरह रखना चाहिए। यदि किसी सख्या का गुणक शून्य हो और हर भी शून्य हो तो समझना चाहिए कि उस सख्या में कोई परिवर्तन नहीं हुआ। इसी प्रकार शून्य को जोड़ने या घटाने पर भी सख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता।”

बीजगणित में भी यही निष्कर्ष दिये गये हैं। साथ-साथ यह भी बतलाया गया है कि जब कोई राशि शून्य में घटायी जाती है तब उसका चिह्न बदल जाता है, परन्तु जोड़ने में चिह्न वही रहता है।

परमात्म्य राशि के रूप में शून्य

ध्यान देने योग्य है कि परिकर्म $y - 0$ और परिकर्म $0 - y$ के फलों को ब्रह्मगुप्त क्रमानुसार $\frac{y}{0}$ और $\frac{0}{y}$ की भाँति लिखने को कहते हैं। निश्चित रूप में कहना कठिन है कि इन स्वरूपों में उनका क्या तात्पर्य था। संभव है कि चन्द्रराशि ‘य’ का मान न ज्ञात होने से उन्होंने इन स्वरूपों का निश्चित मान निर्धारित नहीं किया। फिर भी, प्रतीत होता है कि उन्होंने शून्य को ऐसी परमात्म्य सख्या के रूप में माना जो कि अन्ततोगत्वा शून्य में विलीन हो जाती है। यदि यह अनुमान सत्य हो, तो ब्रह्मगुप्त ने उक्त कथन करके उचित ही किया।

परमात्म्य सख्या के रूप में शून्य की कल्पना भास्कर द्वितीय के ग्रंथों में अधिक स्पष्ट है। वे कहते हैं “किसी सख्या को शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है, परन्तु वाद में यदि और परिकर्म करने हैं तो (गुणनफल को शून्य न लेकर) शून्य को गुणक की तरह रखना चाहिए।” उन्होंने आगे कहा है कि यह परिकर्म ज्योतिष की गणना में अत्यन्त महत्व का है। कलन के अध्याय में दिखाया जायगा कि भास्कर द्वितीय ने ऐसी राशियों को वस्तुतः प्रयुक्त किया है जो

अन्ततोगत्वा शून्य हो जाती है, कुछ फलनों के अवकल गुणको का मान निकालने में भी वे सफल हुए हैं। उन्होंने फलन $f(y)$ के अवकल गुणक $f'(y)\delta(y)$ का भी प्रयोग किया है, जो कि 'य' में $\delta(y)$ के तुल्य क्षयवृद्धि होने में होता है।

टीकाकार कृष्ण ने

$$0 \times a = 0 = a \times 0$$

को इस प्रकार से मिद्ध किया है

“जैसे-जैसे गुण्य कम किया जायगा, वैसे-वैसे गुणनफल भी कम होता जायगा।

। यदि गुण्य को परमाल्प कर दिया जाय, तो गुणनफल भी परमाल्प हो जायगा। परन्तु परमाल्प होने का अर्थ शून्य होना है, अतएव यदि गुण्य शून्य हो, तो गुणनफल भी शून्य होगा। । इसी प्रकार, जैसे-जैसे गुणक कम किया जायगा, वैसे-वैसे गुणनफल भी कम होता जायगा, और गुणक के शून्य हो जाने पर, गुणनफल भी शून्य हो जायगा।”

उपर्युक्त अवतरण में शून्य को अवगेही राशि की सीमा के रूप में कल्पित किया गया है।

अनन्त

किमी मस्या को शून्य से भाग देने पर जो लब्धि मिलती है, उसे भास्कर द्वितीय ने 'ख-हर' कहा है, जो कि ब्रह्मगुप्त के 'खच्छेद' ('वह राशि जिसका हर शून्य है') का पर्यायवाचक है। ख-हर के मान के विषय में भास्कर द्वितीय कहते हैं

“जिम प्रकार अनन्त और अच्युत ईश्वर में, प्रलय के समय बहुत से भूतगणों का प्रवेश होने में अथवा मृष्टि में ममय उनके निकल जाने में, कोई विकार नहीं होता, उमी प्रकार इस शून्य हर वाली (ख-हर) राशि में बहुत (बड़ी मस्या को) भी जोड़ने अथवा घटाने पर कोई परिवर्तन नहीं होता।”^१

^१ भास्करीय बीजगणित, पृ० ५-६। जी० थीवो (एस्ट्रानॉमी, ऐस्ट्रालॉजी उण्ड माथेमाटिक, स्ट्रासबर्ग १८६६, पृ० ७३) के मत से यह अवतरण क्षेपक है। परन्तु इसे क्षेपक मानने का कोई कारण नहीं है क्योंकि यह अवतरण उस ग्रंथ की अब तक प्राप्त होने वाली सब हस्तलिपियों में तथा उस ग्रंथ की प्राचीनतम ज्ञात टीका में विद्यमान है। देखिए दत्त, पूर्वोक्त, पृ० १७४।

उपर्युक्त कथन से स्पष्ट है कि भास्कर द्वितीय को ज्ञात था कि

$$\frac{अ}{०} = \infty, \text{ और } \infty + क = \infty ।$$

गणेशदेवज्ञ के अनुसार ख-हर राशि $\frac{अ}{०}$ अनिर्णीत और नि मीम अर्थात् अनन्त है, क्योंकि "यह नहीं कहा जा सकता कि यह कितनी बड़ी है। यदि इम राशि में कोई परिमित सख्या जोड़ या घटा दी जाय तो इसमें कोई परिवर्तन नहीं होता। कारण यह है कि (जोड़ने या घटाने में) उनका समच्छेद करने के लिए एक दूसरे के हर से गुणा करने पर नियत राशि शून्य हो जाती है और उम शून्य को खहर में जोड़ने या घटाने पर उसमें कोई परिवर्तन नहीं होता।"

कृष्णदेवज्ञ लिखते हैं

"जैसे-जैसे भाजक घटता जाता है, वैसे-वैसे लब्धि बढ़ती जाती है। यदि भाजक परमाल्प हो जाय, तो लब्धि परमाधिक हो जायगी। परन्तु यदि यह कहा जा सके कि लब्धि इतनी है तो वह परमाधिक नहीं है, क्योंकि उसमें भी बड़ी सख्या होना सम्भव है। लब्धि का इयत्ताभाव ('इतनी होने' का अभाव) ही उसका परमत्व है। अतएव सिद्ध हुआ कि शून्य हर वाली राशि अनन्त है।"

$\frac{अ}{०} + क = \frac{अ}{०}$ की उपपत्ति के सम्बन्ध में कृष्णदेवज्ञ का वही कथन है जो गणेश-देवज्ञ ने किया है। परन्तु वे उनसे एक पग आगे बढ़ गये हैं, क्योंकि वे लिखते हैं कि

$$\frac{अ}{०} = \frac{ब}{०}$$

इस कथन की पुष्टि में उन्होंने सूर्योदय और सूर्यास्तकाल की अनन्त छाया का दृष्टांत दिया है, जो कि सदैव अनन्त रहती है चाहे शकु की ऊँचाई और त्रिज्या की लम्बाई का मान कितना ही बड़ा क्यों न लिया जाय। " उदाहरणार्थ, यदि त्रिज्या = १२० ली जाय और शकु की ऊँचाई = १, २, ३ या ४ ली जाय, तो त्रैराशिक करने पर कि 'यदि महाशकु में महाच्छाया मिलती है, तो शकु में क्या मिलेगा?' छाया का मान क्रमशः $\frac{१२०}{०}$, $\frac{२४०}{०}$, $\frac{३६०}{०}$ अथवा $\frac{४८०}{०}$ मिलता है। अथवा यदि शकु का

प्रचलित मान, अर्थात् १२ अंगुल, लिया जाय और त्रिज्या को ३४३८, १२०, १०० अथवा

१० के तुल्य माना जाय तो छाया के मान क्रमश $\frac{४१२५६}{०}$, $\frac{१४४०}{०}$, $\frac{१२००}{०}$,

अथवा $\frac{१०८०}{०}$ प्राप्त होंगे, जो सभी अनन्त हैं।^१

अनिर्णीत स्वरूप

ब्रह्मगुप्त का यह कथन अशुद्ध है कि

$$\frac{०}{०} = ०$$

भास्कर द्वितीय ने ब्रह्मगुप्त की इस अशुद्धि को शुद्ध करने का प्रयत्न किया है। उनके अनुसार

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \times t}{t} = a।$$

तथापि इसे व्यक्त करने में उन्होंने जिस भाषा का प्रयोग किया है वह दोषपूर्ण है, क्योंकि उपयुक्त पारिभाषिक शब्द के अभाव के कारण उन्होंने परमात्म्य राशि को शून्य कहा है। फिर भी ज्योतिष में इस निष्कर्ष का उन्होंने जो प्रयोग किया है उससे बिल्कुल स्पष्ट है कि शून्य से उनका तात्पर्य उस छोटी राशि से है जिसका सीमान्तिक मान शून्य है। टेलर^२ और वापूदेव शास्त्री^३ का भी यही मत है।

भास्कर द्वितीय ने इस सम्बन्ध में तीन उदाहरण उपस्थित किये हैं मान निकालो —

$$(१) \frac{३ \left(y \times ० + \frac{y \times ०}{२} \right)}{०} = ६३।$$

इस समीकरण का हल $y = १४$ दिया गया है, जो कि उस परिस्थिति में शुद्ध होगा, जबकि हम ० को ऐसी छोटी संख्या कल्पना करें जिसकी सीमा ० हो।

^१ उपर्युक्त सब उद्धरण उन टीकाओं से लिये गये हैं। कोलब्रुक (पूर्वोक्त ग्रंथ) ने भी उन्हें उद्धृत किया है।

^२ टेलर की लीलावती, बम्बई १८१६, पृ० २६।

^३ उनका बीजगणित, भाग १, बनारस, १८७५, पृ० १७६ आदि।

$$(२) \left\{ \left(\frac{य}{०} + य - १ \right)^२ + \left(\frac{य}{०} + य - ० \right) \right\} \times ० = १०,$$

जिसका हल $य=६$ दिया गया है।

$$(३) \left[\left\{ \left(य + \frac{य}{२} \right) \times ० \right\}^२ + २ \left\{ \left(य + \frac{य}{२} \right) \times ० \right\} \right] - ० = १५,$$

जिसका हल $य=२$ दिया गया है।^१

भास्कर द्वितीय का कथन कि

$$\frac{अ}{०} \times ० = अ,$$

बिल्कुल शुद्ध नहीं है, क्योंकि यह स्वरूप वस्तुतः अनिर्णीत है और इसका मान सदैव अ नहीं होगा। परन्तु तो भी इतने प्राचीन काल में ० को एक अर्थ देने का उनका प्रयत्न तथा इस प्रश्न का उनका आशिक हल अत्यन्त सराहनीय है, जबकि हम देखते हैं कि यूरोप के गणितज्ञों ने उन्नीसवीं शताब्दी के मध्यकाल तक इस प्रकार की अशुद्धियाँ की हैं।^२

^१ इस उदाहरण और पिछले उदाहरण के हल अशुद्ध हैं, क्योंकि ०^३ को ० के बराबर मान लिया गया है।

^२ मार्टिन ओह्य (१८२८ ई०) का कथन है “यदि ‘अ’ शून्य न हो, परन्तु ‘ब’ शून्य हो, तो $\frac{अ}{ब}$ का कोई अर्थ नहीं है”, क्योंकि लब्धि को “शून्य में गुणा करने पर गुणनफल शून्य ही होगा न कि ‘अ’, जब तक कि ‘अ’ स्वयं शून्य न हो।” लेखुख डेर नीडेर्न अनालिसिस (जर्मन में), जिल्द १, बर्लिन, १८२८, पृ० ११०, ११२।

ग्रन्थानुक्रमणिका

- १ अथर्व ज्योतिष भगवद्दत्त द्वारा संपादित, लाहौर, १९२४।
- २ आपस्तव-शुल्ब-सूत्र आपस्तव (ल० ४०० ई० पू०) कृत। कपर्दिस्वामि, करबिन्द, तथा सुन्दरराज कृत टीकाओं सहित, डी० श्रीनिवासाचार्य और वी० एस० नरसिंहाचार्य द्वारा संपादित, यूनिवर्सिटी ऑफ मैसूर मस्कृत ग्रंथावलि में प्रकाशित, १९३१, ए० व्युर्क कृत जर्मन अनुवाद, व्याख्यात्मक तथा आलोचनात्मक टिप्पणियों के सहित, जाइट्स्चिफ्ट डेर डाय्शेन मॉरगेन्लेडिंशेन् गेसेल्शाफ्ट, जिल्द ५५, १९०२, पृ० ५४३-५९१, जिल्द ५६, १९०३, पृ० ३२७-३९१ में प्रकाशित।
- ३ आर्च ज्योतिष सुधाकर द्विवेदी द्वारा स्वविरचित टीका के साथ प्रकाशित, बनारस, १९०६।
- ४ आर्यभटीय आर्यभट प्रथम (४९९ ई०) कृत। परमेश्वर (१४३० ई०) कृत भटदीपिका टीका सहित, एच० कर्न द्वारा संपादित, लैंदन, १८७४, हिन्दी अनुवाद सहित, उदय नारायण मिह द्वारा संपादित, मुजफ्फर-पुर, १९०६, नीलकण्ठ (१५०० ई०) कृत महाभाष्य नामक टीका सहित, के० साम्बशिव शास्त्री द्वारा संपादित (भाग १, गणित-पाद, त्रिवेन्द्रम, १९३०, भाग २, कालक्रियापाद, त्रिवेन्द्रम, १९३१, भाग ३, मूद्रणालयस्थ)। अंग्रेजी अनुवाद पी० मी० मेनगुप्त कृत ("दि आर्यभटीयम्", जर्नल ऑफ दि डिपार्टमेण्ट ऑफ लेटर्स इन दि यूनिवर्सिटी ऑफ कलकत्ता, जिल्द १६, १९२७), डब्ल्यू० ई० क्लार्क कृत ("दि आर्यभटीय ऑफ आर्यभट", शिकागो, १९३०)। गणित-पाद नामक द्वितीय अध्याय का फ्रेंच अनुवाद एल्० रोड कृत (जर्नल एशियाटिक, जिल्द १३ (३), १८७८, पुनर्मुद्रित, पेरिस, १८७९), और अंग्रेजी अनुवाद जी० आर० के कृत ("नोट्स

ऑन इंडियन मैथेमेटिक्स, न० २—आर्यभट्ट, जर्नल ऑन दि एशियाटिक सोसायटी आव बंगाल, जिल्द ४, १९०८।
हस्तलिखित टीकाएँ (१) भास्कर प्रथम (६२९ ई०) कृत,
(२) सूर्यदेव यज्वा (१२ वीं शताब्दी) कृत भट्टप्रकाशिका।

- ५ करण-कुतूहल भास्कर द्वितीय (११५० ई०) कृत। मुमति हर्ष कृत टीका सहित, माधव शास्त्री द्वारा संपादित, बम्बई, १९०१।
- ६ करण-पद्धति पुनमन सोमयाजि (१४३१ ई०) कृत। (हस्तलिपि)
- ७ कात्यायन-शुल्ब-सूत्र कात्यायन (ल ४०० ई० पू०) कृत। व्याख्यात्मक टिप्पणियो सहित, विद्याधर शर्मा द्वारा संपादित, बनारस, १९२८।
- ८ खण्ड-खाद्यक ब्रह्मगुप्त (६२८ ई०) कृत। आमराज (ल० १२५० ई०) कृत टीका सहित, बबुआ मिश्र द्वारा संपादित, कलकत्ता, १९२५। अंगरेजी अनुवाद, व्याख्यात्मक तथा आलोचनात्मक टिप्पणियो सहित, पी० सी० सेनगुप्त द्वारा संपादित, कलकत्ता, १९३४।
हस्तलिखित टीकाएँ (१) पृथूदकस्वामी (८६४ ई०) कृत,
(२) वरुण कृत, (३) भट्टोत्पल कृत।
- ९ गणित-कौमुदी नारायण (१३५६ ई०) कृत। (हस्तलिपि)
- १० गणित-तिलक श्रीपति (१०३९ ई०) कृत। सिंहतिलक सूरि (ल १२७५ ई०) कृत टीका सहित, एच० आर० कापदीआ द्वारा संपादित (गायकवाड ओरियंटल सीरीज न० ७८, बडोदा, १९३७)।
- ११ गणित-मजरी दुडिराज (१५५८ ई०) सुत गणेश कृत। (हस्तलिपि)
- १२ गणित-सार-संग्रह महावीर (८५० ई०) कृत। अंगरेजी अनुवाद और टिप्पणियो सहित, एम० रंगाचार्य द्वारा संपादित, मद्रास, १९१२।
- १३ ग्रहलाघव गणेशदेवज्ञ (ल १५४५ ई०) कृत। मल्लारि, विश्वनाथ, तथा स्वविरचित टीकाओ सहित, सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, द्वितीयावृत्ति, बम्बई, १९२५।
- १४ तत्र-संग्रह नीलकण्ठ (१५०० ई०) कृत। संस्कृत टीका, हस्तलिखित।
- १५ त्रिशतिका श्रीधर (७५० ई०) कृत। सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, बनारस, १८९९। एन० रामानुजाचार्य और जी० आर० के ने

मूल के प्रमुख सूत्रों का अंगरेजी अनुवाद, टिप्पणियों तथा आलोचनाओं के साथ प्रकाशित किया है ('त्रिशक्तिका आँव श्रीधराचार्य', विव्लि-योथेका मैथेमेटिका, जिल्द १३ (३), १९१२-१३, पृ० २०३ इत्यादि) द्विवेदी के सस्करण का पाठ स्पष्टतः अपूर्ण है। हमारे संग्रह की हस्तलिपियों में, पद्यपि वे अपूर्ण हैं, सूत्रों और उदाहरणों की संख्या कुछ अधिक है।

- १६ ध्यानग्रहोपदेश ब्रह्मगुप्त (६२८ ई०) कृत। सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित तथा उनके ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त में परिशिष्ट के रूप में प्रकाशित।
- १७ पंच-सिद्धान्तिका वराहमिहिर (ल ५५० ई०) कृत। संस्कृत टीका, अंगरेजी अनुवाद और आलोचनात्मक टिप्पणियों सहित, जी० थीबो और सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, बनारस, १८८९।
- १८ पाटीसार पुनीश्वर (जन्म १६०३ ई०) कृत। (हस्तलिपि)
- १९ वक्षाली हस्तलिपि, जी० आर० के द्वारा संपादित, (वक्षाली मैथ्युस्क्रिप्ट-एस्टडी इन मेडीवल मैथेमेटिक्स, भाग १ और २, कलकत्ता, १९२७, भाग ३, दिल्ली, १९३३)।
- २० बीजगणित जानराज (१५०३ ई०) कृत। हस्तलिपि।
- २१ बीजगणित नारायण (१३५० ई०) कृत। हस्तलिपि।
- २२ बीजगणित भास्कर द्वितीय (११५० ई०) कृत। सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित और मुरलीधर झा द्वारा सशोधित, बनारस, १९२७, कृष्णदैवज्ञ (ल १६०० ई०) कृत नवाकुर टीका सहित, बी० जी० आपटे द्वारा संपादित (आनदाश्रम संस्कृत ग्रंथावलि, पूना १९३०)। एच० टी० कोलब्रुक कृत अंगरेजी अनुवाद ('अलजवरा बिद अस्थिमेटिक एण्ड मेन्थ्यूरेशन फ्राम दि संस्कृत आँव ब्रह्मगुप्त एण्ड भास्कर', लंदन, १८१७)। अन्य टीकाओं की हस्तलिपियाँ (१) रामकृष्ण (ल १६४८ ई०) कृत बीजप्रबोध, (२) सूर्यदास (जन्म १५०८ ई०) कृत।

इस पुस्तक में भास्कर द्वितीय की बीजगणित के उल्लेख मुरलीधर झा के सशोधित संस्करण में दिये गये हैं।

- २३ बृहज्जातक वराहमिहिर (ल ५५० ई०) कृत। भट्टोत्पल (१९६६ ई०) की टीका सहित, रमिक मोहन चट्टोपाध्याय द्वारा संपादित,

कलकत्ता, १३०० विक्रमी, मोतागम झा द्वारा संपादित, बनारस, १९२२।

२४ बृहत्सहिता वराहमिहिर (ल ५५० ई०) कृत। एच० कर्न द्वारा संपादित कलकत्ता, १८६५, भट्टाचार्य कृत टीका सहित, मुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित (विजयानगरम् मस्कृत ग्रंथावलि, जिल्द १ और २, बनारस, १८९५, १८९७)। अंगरेजी अनुवाद, एच० कर्न कृत (उनके ग्रंथों का संग्रह देखो)।

२५ ब्राह्म-स्फुट-सिद्धान्त ब्रह्मगुप्त (६२८ ई०) कृत। मुधाकर द्विवेदी द्वारा अपनी मस्कृत टीका के साथ संपादित, बनारस, १९०२। अध्याय १२ और १३ का, जो केवल अकगणित और बीजगणित में सम्बन्ध रखते हैं, एच० टी० कोलब्रुक ने अंगरेजी में अनुवाद किया है (अलजेवरा विद अरिथमेटिक एण्ड मेन्थ्यूरेजन् इत्यादि)। पृथूदक स्वामि (८६० ई०) कृत टीका, हस्तलिखित (अपूर्ण)।

२६ बौधायन-शुल्ब-सूत्र बौधायन (ल ८०० ई० पू०) कृत। अंगरेजी अनुवाद, आलोचनात्मक टिप्पणियों तथा द्वारकानाथ उज्वा कृत टीका के उद्धरणों के सहित, जी० शीवो द्वारा संपादित (पंडित, प्राचीन श्रेणी, जिल्द ९ और १०, १८७४-५, नवीन श्रेणी, जिल्द १, १८७७)। इस ग्रंथ का मूल डब्ल्यू० कैलेण्ड के बौधायन-शुल्ब-सूत्र (तीन जिल्दों में, कलकत्ता, १९०४, १९०७, १९१३) में (३० वें अध्याय के रूप में) उपलब्ध है।

२७ महाभास्करीय भास्कर प्रथम (६२९ ई०) कृत। हस्तलिखित टीकायें (१) प्रयोग-रचना, (२) परमेश्वर (१४३० ई०) कृत।

२८ महासिद्धान्त आर्यभट्ट द्वितीय (ल० ९५० ई०) कृत। मुधाकर द्विवेदी द्वारा स्वविरचित टीका के साथ संपादित, बनारस, १९१०।

२९ मानव-शुल्ब-सूत्र मनुप्रणीत, हस्तलिखित। अंगरेजी अनुवाद एन० के० मजूमदार कृत (जर्नल आव दि डिपार्टमेन्ट ऑव लेटर्स इन दि यूनिवर्सिटी ऑव कलकत्ता, जिल्द ८ १९२० में प्रकाशित)।

३० लघुभास्करीय भास्कर प्रथम (६२९ ई०) कृत। अकरनारायण (८६९ ई०) कृत टीका, हस्तलिखित।

३१ लघुमानस मञ्जुल (९३२ ई०) कृत। परमेश्वर (१४३० ई०) की टीका, हस्तलिखित।

२ लीलावती भास्कर द्वितीय (११५० ई०) कृत। टिप्पणियो सहित, सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, बनारस, १९१०। अंगरेजी अनुवाद एच० टी० कोलब्रुक कृत (अलजेबरा विद अरिथमेटिक ऐण्ड मेन्ड्यूरेशन इत्यादि), जे० टेलर कृत (लीलावती, बम्बई, १८१६)। कोलब्रुक के अनुवाद को हाराणचन्द्र वनर्जी ने आलोचनात्मक टिप्पणियों के साथ पुनः संपादित किया है (लीलावती, द्वितीय संस्करण, कलकत्ता, १९२७)। हस्तलिखित टीकाएँ गणेशदैवज्ञ (१५४५ ई०) कृत बुद्धि-विलामिनी, (२) गंगाधर (१४३२ ई०) कृत गणितामृतसागरी, (३) रामकृष्ण (१३३९ ई०) कृत गणितामृतलहरी, (४) राम-कृष्णदेव कृत मनोरजन, (५) सूर्यदास (१५४१ ई०) कृत गणिता-मृतकूपिका, (६) लक्ष्मीदास (१५०० ई०) कृत चिन्तामणि, (७) मुनीश्वर (१६०८ ई०) कृत निसृष्टदूती।

इस पुस्तक में लीलावती के उल्लेख द्विवेदी के संस्करण में दिये गये हैं।

३३ शिष्य-धो-वृद्धिद लल्ल कृत। सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, बनारस, १८८६। मल्लिकार्जुन सूरि (११७९ ई०) कृत टीका, हस्तलिखित।

३४ सद्गतनमाला शंकरवर्मन् कृत। (हस्तलिपि)

३५ सिद्धान्त-तत्त्व-विवेक कमलाकर (१६५८) कृत। ग्रथकार कृत शेषवामना सहित, सुधाकर द्विवेदी द्वारा संपादित, बनारस, १८८५।

३६ सिद्धान्त-शिरोमणि भास्कर द्वितीय (११५० ई०) कृत। ग्रथकार कृत टीका (वासना-भाष्य) सहित, वापूदेव शास्त्री द्वारा संपादित, बनारस, १८६६, नृसिंह (१६२१ ई०) कृत वामनावार्तिक और मुनीश्वर (१६३५ ई०) कृत मरीचि टीकाओं सहित, मुरलीधर झा द्वारा संपादित (जिल्द १, गणिताध्याय, अध्याय १, बनारस, १९१७), स्वविरचित संस्कृत और हिन्दी टीकाओं सहित, गिरिजा-प्रसाद द्विवेदी द्वारा संपादित जिल्द १ और २ (लखनऊ, १९११,

१९२६)। गोलाव्याय के मूल श्लोको का अँगरेजी अनुवाद,
एल० विल्किंसन कृत, कलकत्ता, १८६१।

३७ सिद्धान्तशेखर श्रीपति (१०३९ ई०) कृत। मयिकभट्ट की टीका
(अध्याय १ से ४) तथा ववुआ मिश्र की टीका (अध्याय ४ से
१०) सहित, ववुआ मिश्र द्वारा मपादित (भाग १, कलकत्ता,
१९३२)।

३८ सूर्य-सिद्धान्त रगनाथ की मस्कृत टीका सहित, एफ० ई० हाल
और वापूदेव शास्त्री द्वारा मपादित, कलकत्ता, १८९१,
सुधाकर द्विवेदी द्वारा स्वविरचित मस्कृत टीका के साथ मपादित,
कलकत्ता, १९०९-१०। अंगरेजी अनुवाद तथा आलोचनात्मक
टिप्पणियो सहित, ई० वजेंस और डब्ल्यु डी० व्हिटनी द्वारा मपादित,
बंगला अनुवाद तथा आलोचनात्मक टिप्पणियो सहित, विज्ञानानन्द
स्वामी द्वारा मपादित।
